Министерство Российской Федерации по делам гражданской обороны,
чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий

Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам
гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России»
(федеральный центр науки и высоких технологий)

А.О. Жуков

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Часть 2
Математические основы и методы

Учебное пособие

Москва
ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ)
2023

УДК 303.732
ББК 32.965я73
Ж85

Допущено Министерством Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий в качестве учебного пособия для курсантов, студентов и слушателей образовательных организаций МЧС России.

Рецензенты:
В. А. Акимов — д. т. н., проф. (ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ));
В. Н. Липский — д. филос. н., проф. (Академия ГПС МЧС России);
Р. А. Дурнев — д. т. н., доц. (РАРАН).

Жуков А. О.
Ж85 Системный анализ. Часть 2. Математические основы и методы: Учеб. пособ. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2023. 228 с.

ISBN 978-5-93970-268-3 (ч. 2)
ISBN 978-5-93970-266-9

Учебное пособие подготовлено на основе курса лекций, разработанных и прочитанных автором в соответствии с рабочей программой дисциплины «Системный анализ» (72 часа) аспирантам, обучающимся в аспирантуре ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) по направлению подготовки 56.06.01 «Военные науки», профилю подготовки 20.02.24 «Гражданская оборона. Местная оборона» и направлению подготовки 20.06.01 «Техносферная безопасность», профилю подготовки 05.26.02 «Безопасность в чрезвычайных ситуациях», в двух частях.

Учебное пособие может быть использовано при подготовке кадров высшей квалификации, обучающихся по различным формам и направлениям подготовки магистратуры и аспирантуры, а такжепо многим специальностям специалитета.

В части 2 излагаются наиболее простые в дидактическом плане и вместе с тем важные для прикладных целей математические методы системного анализа.

УДК 303.732
ББК 32.965я73

ISBN 978-5-93970-268-3

Содержание

Введение

Актуальность учебного пособия связана с повышением интереса научной общественности к системному мышлению, системному подходу и методам системного анализа как универсальной общенаучной методологии исследования сложных систем разной природы и решения сложных междисциплинарных проблем в условиях неопределенности и риска.

Как было указано в части 1 учебного пособия, системный анализ является многокомпонентной дисциплиной. В частности, одной из ее важнейших составляющих, без которой немыслимы какие-либо приложения, являются математические основы и методы системного анализа. Эта часть курса опирается на достижения смежных прикладных математических дисциплин, важнейшими из которых являются: дискретная математика; методы оптимизации; дифференциальные и разностные уравнения; теория управления и ряд других дисциплин. Все эти области математического знания образуют математический фундамент современной теории принятия решений, и, как следствие, современного системного анализа.

При подготовке содержания этой части курса автор стремился достичь рационального компромисса в решении двух противоречивых дидактических задач. С одной стороны, необходимости обеспечения максимальной полноты изложения сложных методов системного анализа, а с другой стороны, необходимости максимального упрощения курса в связи с такими факторами, как:

- ограниченность часов, отведенных на изучение дисциплины;
- необходимость погружения в связанные смежные дисциплины; и
- различный уровень математической подготовки слушателей, зачастую недостаточно высокий.

Системное согласование названных противоречивых целей и предопределило содержание (тематический перечень) части 2 учебного пособия.

С самого начала изложения математических основ системного анализа акцент сделан на систематизированное изложение основ теории булевых алгебр на примере алгебры высказываний и основных положений теории множеств. В методологическом плане это важно, поскольку булевы алгебры часто используются при проектировании логики поведения целенаправленных систем, в частности – роботизированных спасательных комплексов, что обусловливает практическую значимость части 2 учебного пособия при подготовке аспирантов в МЧС России.

Аналогично, и теория множеств также представляется важной по многим причинам, хотя бы потому, что математическая формализация многих содержательных понятий системного анализа и адекватное понимание соответствующей научной литературы в принципе невозможны без привлечения ее аппарата.

Кроме того, в пособии уделено большое внимание теории отношений, поскольку эта теория и связанная с ней теория графов является общепризнанным апробированным инструментом, используемым исследователями и аналитиками при формализации связей и поведения подсистем и элементов в структуре сложных систем разной природы. В частности, одним из перспективных приложений этой теории являются каузальные (причинно-следственные) диаграммы, широко используемые в имитационном моделировании системной динамики.

Несомненным достоинством является изложение в пособии основных положений теории нечетких множеств, имеющей важное прикладное значение при формализации лингвистической (лексической) неопределенности.

Отдельное внимание в пособии уделено рассмотрению подходов к раскрытию целевой неопределенности, неизбежно возникающей в задачах векторной (многокритериальной) оптимизации, а также в задачах комплексной оценки эффективности деятельности федеральных органов государственной власти, в частности – МЧС России.

Также в пособии рассмотрен метод анализа иерархий, разработанный Томасом Саати и традиционно относящийся к классическим достижениям системного анализа.

В заключительном разделе пособия рассматривается известный в теории управления метод математического моделирования сложных систем в пространстве состояний. Метод обсуждается с учетом двух подходов к формализации неопределенности наблюдаемых данных: стохастического и теоретико-множественного.

Часть 2 учебного пособия завершается кратким изложением основных понятий синергетики. В частности, на примере странного аттрактора Лоренца иллюстрируется явление динамического хаоса, возникающего в нелинейных неравновесных диссипативных системах, обладающих детерминированной динамикой.

Таким образом, часть 2 учебного пособия раскрывает простейшие, но вместе с тем важнейшие прикладные математические методы системного анализа, и, кроме того, знакомит аспирантов с многообразием факторов, обусловливающих системную неопределенность.

1. Математические основы общей теории систем

1.1. Алгебра высказываний

Исходная информация в постановке сложных системных задач, как правило, носит вербальный характер. Поэтому строгая математическая формализация системных задач во многих случаях предполагает анализ соответствующих высказываний.

Кроме того, математическое моделирование логики поведения сложных целенаправленных систем, таких как лифт, а также решение задач системного проектирования роботизированных спасательных комплексов, обладающих целенаправленным поведением и нередко применяемых силами МЧС России во время проведения поисково-спасательных операций, невозможны без использования булевых алгебр.

Существует много интересных примеров, демонстрирующих актуальность применения соответствующего математического аппарата в решении сложных прикладных системных проблем.

В частности, известный психиатр и математик Владимир Лефевр в своём знаменитом труде «Алгебра совести» применял булевы алгебры для формализации морально-этических аспектов жизни человека, имеющих важное прикладное значение, в частности – в террологии (науке о терроризме), и, кроме того, создал теорию рефлексивных игр [1].

Таким образом, необходимость структурирования и формализации вербальной информации актуализирует применение булевых алгебр, в частности, алгебры высказываний, в процессах формализации прикладных системных задач, в связи с чем заслуживает выделения соответствующих теоретических аспектов в качестве математической основы общей теории систем и системного анализа как прикладной общенаучной методологии решения сложных междисциплинарных проблем.

Высказывание – это повествовательное предложение, которое в заданном контексте является истинным либо ложным.

Фиксация контекста является важным необходимым предусловием для определения истинности высказывания.

Пример. Предложение «Снег – белый» является высказыванием, так как при фиксированном контексте можно установить его истинность либо ложность. В контексте экологически нормальных условий это высказывание истинно. Однако в экологически загрязнённой местности это высказывание может оказаться ложным.

Отметим также, что в рамках контекста в обязательном порядке также определяются понятия «снег» и «белый цвет». Причём при попытке дать определения этим понятиям будут появляться всё новые и новые термины. Поэтому проблема формализации естественного языка является сложной, а в рамках формальной логики – неразрешимой.

Пример. Предложение «Крокодилы летают» является высказыванием, ложным в естественном природном контексте. Трудно создать контекст, в котором это высказывание было бы истинным, однако теоретически такая возможность не исключена.

Пример. Предложение «Это предложение ложно» не является высказыванием, поскольку, как легко убедиться, ни в одном контексте невозможно установить его истинность либо ложность. Этот пример демонстрирует так называемый логический парадокс Рассела.

Высказывания обозначаются большими буквами английского алфавита с индексами или без них. Каждая такая буква является **переменной**.

Если высказывание A, рассматриваемое в заданном контексте, является истинным, то пишем: $|A| = 1$. В противном случае A ложно, то есть $|A| = 0$.

Таким образом, каждая переменная в алгебре высказываний может принимать одно из двух возможных значений: ноль либо единица.

Не следует путать эти логические константы с соответствующими им арифметическими числами, к которым логические константы не имеют никакого отношения. В алгебре высказываний ноль и единица условны и выбраны лишь для того, чтобы отличать в заданном контексте ложные высказывания от истинных. На самом деле вместо символов нуля и единицы могут быть использованы два различных объекта произвольной природы, например, чёрный шарик и синий шарик, соответственно.

Вместе с тем иногда бывает весьма удобно применять арифметическую интерпретацию и арифметические действия к логическим константам 0 и 1.

Над высказываниями могут выполняться различные алгебраические действия, называемые логическими операциями [2].

Рассмотрим основные логические операции.

Тождественная операция сохраняет высказывание неизменным.

Отрицание высказывания A есть высказывание $\overline{A}$ (читается «не A»), истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 1.

Таблица 1

Таблица истинности операции «отрицание»

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Тождественная операция и отрицание являются унарными операциями алгебры высказываний, так как выполняются над одним аргументом.

Все остальные операции алгебры высказываний, рассматриваемые ниже, являются бинарными, то есть выполняются над двумя аргументами.

Дизъюнкция высказываний A и B есть высказывание $A \vee B$ (формально читается «A дизъюнкция B», в разговорном языке семантически соответствует высказыванию «A или B»); истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B.

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 2.

Таблица 2

Таблица истинности операции «дизъюнкция»

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция высказываний A и B есть высказывание $A \wedge B$ (формально читается «A конъюнкция B»; в разговорном языке семантически соответствует высказыванию «A и B»), истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B.

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 3.

Таблица 3

Таблица истинности операции «конъюнкция»

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация высказываний A и B есть высказывание $A \to B$ (формально читается «A импликация B»; в разговорном языке семантически приближается к высказыванию «Если A, то B ») и определяется по формуле:

$$A \to B = \overline{A} \vee B. \tag{1}$$

Здесь высказывание A есть **гипотеза**, а высказывание B – **следствие** импликации.

Таким образом, **импликация $A \to B$ ложна тогда и только тогда, когда гипотеза A истинна, а следствие B ложно**.

Полезно запомнить, что импликация $A \to B$ истинна тогда и только тогда, когда выполняется неравенство: $|A| \leq |B|$.

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 4.

Таблица 4

Таблица истинности операции «импликация»

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Это означает, что **из ложной гипотезы следует всё, что угодно: как ложь, так и истина**.

А из истинной гипотезы следует только истинное следствие.

Пример. Высказывание «Если 5 = 3, то 4 = 7» истинно. Причём истинность импликации вовсе не означает истинность высказывания «4 = 7».

Пример. Высказывание «Если 5 = 3, то 4 = 4» истинно.

Пример. Высказывание «Если 5 = 5, то 4 = 7» ложно.

Кроме того, импликация обладает следующим важным свойством:

$$A \to B = \overline{B} \to \overline{A}. \tag{2}$$

Эквиваленция (двойная импликация) высказываний A и B есть высказывание $A \leftrightarrow B$ (формально читается «A эквиваленция B», а в разговорном языке «A эквивалентно B» либо «A имеет место тогда и только тогда, когда выполняется B»); истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B имеют равные логические значения: одновременно истинные либо одновременно ложные:

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A). \tag{3}$$

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 5.

Таблица 5

Таблица истинности операции «эквиваленция»

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сумма по модулю 2 («XOR», «альтернативное, исключающее или») высказываний A и B есть высказывание $A \oplus B$ (в разговорном языке читается «Только A либо только B»); истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B имеют разные логические значения:

$$A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}. \tag{4}$$

Название операции «сумма по модулю 2» оправдано тем, что её результат равен остатку от целочисленного деления на 2 суммы логических значений аргументов.

Соответствующая таблица истинности имеет вид табл. 6.

Таблица 6

Таблица истинности операции «сумма по модулю 2»

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

С помощью логических операций из заданных исходных высказываний можно строить формулы, то есть более сложные высказывания. Формулы будем обозначать большими рукописными буквами английского алфавита.

В формулах приоритет операции отрицания считается наивысшим, а для указания порядка выполнения любых других операций мы будем использовать общепринятые в математических выражениях круглые скобки.

Множество формул алгебры высказываний определяется индуктивно (рекурсивно) следующими тремя условиями:

во-первых, каждая переменная – формула;

во-вторых, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – формулы, то $(\overline{\mathcal{A}})$, $((\mathcal{A}) \vee (\mathcal{B}))$, $((\mathcal{A}) \wedge (\mathcal{B}))$ – также формулы;

в-третьих, других формул не существует.

Импликация, эквиваленция и сумма по модулю 2 формул в соответствии с определениями этих операций являются удобными сокращёнными обозначениями более сложных формул:

$$(\mathcal{A}) \to (\mathcal{B}) = (\overline{\mathcal{A}}) \vee (\mathcal{B}); \tag{5}$$

$$(\mathcal{A}) \leftrightarrow (\mathcal{B}) = ((\mathcal{A}) \to (\mathcal{B})) \wedge ((\mathcal{B}) \to (\mathcal{A})); \tag{6}$$

$$(\mathcal{A}) \oplus (\mathcal{B}) = \overline{(\mathcal{A}) \leftrightarrow (\mathcal{B})}. \tag{7}$$

Интерпретация формулы алгебры высказываний – это сопоставление каждой переменной, содержащейся в формуле, значения истина («1») либо ложь («0»).

Множество всех интерпретаций заданной формулы удобно сводить в единую таблицу истинности этой формулы, каждая строка которой соответствует одной интерпретации.

Пример. Таблицы истинности для основных логических операций при их определении были приведены выше и все вместе представлены в табл. 7.

Таблица 7

Таблица истинности для основных логических операций

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$B \to A$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Пример. Рассмотрим формулу:

$$\mathcal{F}(A, B) = (A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B).$$

Таблица истинности для этой формулы имеет вид табл. 8.

Таблица 8

Пример таблицы истинности

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\mathcal{F}(A, B)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

В алгебре высказываний важными являются следующие определения.

Тавтология – это формула алгебры высказываний, истинная при любой интерпретации входящих в неё переменных.

Тавтология обозначается логической константой «1», которая также является формулой алгебры высказываний.

Поскольку единица как формула алгебры высказываний не зависит от аргументов, то она является нуль-арной операцией.

Пример. Следующие формулы являются тавтологиями:

$$A \leftrightarrow A = 1;$$

$$A \to A = \overline{A} \vee A = 1;$$

$$A \to (A \vee B) = \overline{A} \vee A \vee B = 1 \vee B = 1;$$

$$(A \wedge B) \to A = \overline{A \wedge B} \vee A = \overline{A} \vee \overline{B} \vee A = \overline{A} \vee A \vee \overline{B} = 1 \vee \overline{B} = 1.$$

Пример. Рассмотрим следующие два высказывания:

A = «Слово x равно слову y»;

B = «Длина слова x равна длине слова y».

Тогда импликация $A \to B$ является тавтологией, поскольку, исходя из содержательного смысла (семантики) этих высказываний, в реальности невозможен контекст, при котором высказывание A истинно, а B – ложно.

Противоречие – это формула алгебры высказываний, ложная при любой интерпретации входящих в неё переменных.

Противоречивая формула обозначается логической константой «0», которая также является формулой алгебры высказываний.

Поскольку нуль как формула алгебры высказываний не зависит от аргументов, то он, как и единица, является нуль-арной операцией.

Отрицание тавтологии является противоречием, и наоборот, отрицание противоречия является тавтологией.

Пример. Следующие формулы логически противоречивы:

$$A \oplus A = 0;$$

$$\overline{A \to A} = \overline{\overline{A} \vee A} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{A} = A \wedge \overline{A} = 0.$$

Формула алгебры высказываний называется выполнимой, если она истинна хотя бы на одной интерпретации входящих в неё переменных.

Пусть далее $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – произвольные формулы алгебры высказываний. Тогда имеют место следующие **основные законы алгебры высказываний**:

1. Коммутативность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \end{cases}. \tag{8}$$

2. Дистрибутивность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \\ \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \end{cases}. \tag{9}$$

3. Нейтральность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee 0 = \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \wedge 1 = \mathcal{A} \end{cases}. \tag{10}$$

4. Дополненность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee \overline{\mathcal{A}} = 1 \\ \mathcal{A} \wedge \overline{\mathcal{A}} = 0 \end{cases}. \tag{11}$$

В справедливости всех этих законов можно легко убедиться, например, с помощью соответствующих таблиц истинности.

Выделение именно этих четырёх пар законов в качестве основных оправдано тем, что из них можно получить формально (аксиоматически) любые законы алгебры высказываний, не используя таблицы истинности.

В частности, можно доказать следующие **семь важных следствий**.

1. Универсальность границ:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee 1 = 1 \\ \mathcal{A} \wedge 0 = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

2. Абсорбция (поглощение):

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}) = \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{A}) = \mathcal{A} \end{cases}. \tag{13}$$

3. Идемпотентность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee \mathcal{A} = \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{A} \end{cases}. \tag{14}$$

4. Ассоциативность:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \end{cases}. \tag{15}$$

5. Единственность отрицания:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \vee \mathcal{X} = 1 \\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{X} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{X} = \overline{\mathcal{A}}. \tag{16}$$

6. Инволютивность отрицания:

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}. \tag{17}$$

7. Правило де Моргана:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} \wedge \bar{\mathcal{B}} \\ \overline{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} \vee \bar{\mathcal{B}} \end{cases}. \tag{18}$$

Кроме операций между высказываниями существуют направленные связи – **логические отношения**, которые не являются операциями.

Важнейшими примерами бинарных логических отношений являются логическое следствие и логическая эквивалентность. Рассмотрим их.

Логическое следствие – это направленная логическая связь $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, которая возникает, если **импликация** $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **является тавтологией**.

Здесь формулу $\mathcal{A}$ называют гипотезой, а формулу $\mathcal{B}$ – следствием. Говорят, что $\mathcal{A}$ является достаточным условием для $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$, в свою очередь, – необходимым условием для $\mathcal{A}$.

Сама же запись $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ читается: «формула $\mathcal{B}$ логически следует из формулы $\mathcal{A}$» либо «формула $\mathcal{A}$ влечёт за собой формулу $\mathcal{B}$».

Пример. Если два слова равны, то равны и их длины:

$$\underbrace{(x = y)}_{A} \Rightarrow \underbrace{(|x| = |y|)}_{B}.$$

Здесь единственная интерпретация, при которой импликация $A \to B$ могла бы стать ложной (когда высказывание A истинно, а B ложно), в реальности невозможна, то есть в рассматриваемом примере $A \to B = 1$.

Примечание. Алфавит – это произвольное конечное множество символов (букв). Слово над алфавитом – это произвольная конечная упорядоченная последовательность символов данного алфавита. Длина слова – это число букв, образующих это слово.

Обратная связь неверна ($\mathcal{A} \not\Rightarrow \mathcal{B}$), так как слова одинаковой длины могут не совпадать.

Пример. Смерть человека влечёт за собой отрицание возможностей.

Пример. Чрезвычайная ситуация влечёт за собой ущерб.

Логическая эквивалентность – это двунаправленная связь $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, которая возникает, если эквиваленция $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ является тавтологией.

Очевидно, эквивалентность формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ существует тогда и только тогда, когда выполняются оба логических следствия: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Сама же запись $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ или $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ означает логическую эквивалентность (логическое равенство) ***формул*** $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и читается: «$\mathcal{A}$ равносильно $\mathcal{B}$» или «$\mathcal{A}$ эквивалентно $\mathcal{B}$», или «$\mathcal{A}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется $\mathcal{B}$».

Пример. Для любых формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ можно доказать справедливость следующей цепочки эквивалентностей:

$$(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (|\mathcal{A}| = 1); \qquad (\mathcal{B}) \Leftrightarrow (|\mathcal{B}| = 1);$$

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \left(\overline{\mathcal{B}} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}}\right);$$

$$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A}) \Leftrightarrow (|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|).$$

Пример. Теорема Пифагора: треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда сумма квадратов длин его катетов равна квадрату длины его гипотенузы.

Определение. Формула $\mathcal{B}$ логически следует из гипотез $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, если импликация $(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{B}$ является тавтологией.

Отношение логического следствия записывают в виде условной дроби, в числителе которой через запятую перечисляются гипотезы (посылки), а в знаменателе указывается следствие:

$$\frac{\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n}{\mathcal{B}}.$$

Если $n = 1$, то есть гипотеза одна, то используется стандартное обозначение $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Пример 1. Правило выбора «Modus Ponens»:

$$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B}}{\mathcal{B}}.$$

Пример 2. Правило силлогизма:

$$\frac{\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}}{\mathcal{A} \to \mathcal{C}}.$$

Примечание. Силлогизм – это правильный вывод, сделанный индивидом на основе сведений, которыми он располагает.

Дуальность формул алгебры высказываний. Нетрудно заметить, что все законы алгебры высказываний выстроены парами.

Определение. Формула $\mathcal{A}^*$ является **дуальной** по отношению к формуле $\mathcal{A}$, если формула $\mathcal{A}^*$ получена из формулы $\mathcal{A}$ путём замены в ней: всех операций «$\wedge$» на «»; всех операций «$\wedge$» на $\vee$»; всех констант «0» на «1»; всех констант «1» на «0».

Очевидным фактом является инволютивность операции перехода к дуальной формуле:

$$\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}. \qquad (19)$$

Примеры.

$$(A \vee \overline{B})^* = A \wedge \overline{B};$$

$$(A \wedge (\overline{B \vee 1}))^* = A \vee \left(\overline{B \wedge 0}\right);$$

$$(A \to B)^* = (\overline{A} \vee B)^* = \overline{A} \wedge B;$$

$$(A \leftrightarrow B)^* = A \oplus B.$$

Принцип дуальности. Если две формулы алгебры высказываний эквивалентны друг другу, то дуальные к ним формулы также будут эквивалентными друг другу:

$$(\mathcal{A} = \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*). \tag{20}$$

Обобщённое правило де Моргана. Отрицание формулы строится путём замены в дуальной формуле всех переменных на их отрицание:

$$\overline{\mathcal{F}\left(X_1,\ldots,X_n\right)} = \mathcal{F}^*(\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_n). \tag{21}$$

Примеры.

$$\overline{A \vee 0} = \overline{A} \wedge 1;$$

$$\overline{A \vee (B \wedge \overline{C})} = \overline{A} \wedge \left(\overline{B} \vee C\right);$$

$$\overline{A \leftrightarrow B} = \overline{A} \oplus \overline{B}.$$

Алгебра высказываний не анализирует содержательный смысл высказываний, но является наиболее простым и вместе с тем фундаментальным математическим инструментом, позволяющим осуществлять формально системный анализ истинности либо ложности сложных утверждений, неизбежно возникающих при формализации исходной вербальной информации, которая описывает логику поведения исследуемой сложной системы либо некоторую проблемную ситуацию.

В частности, возникновение и развитие аварийных ситуаций на объектах, представляющих собой сложную техническую систему, определяются комбинацией случайных событий, реализующихся с различной частотой и на разных стадиях развития ситуации. Корректная идентификация опасности объектов такого типа возможна в случае применения количественного анализа риска, базирующегося на использовании логико-графических схем, в частности; деревьев отказов и деревьев событий [3].

Пример. Рассмотрим прыжок, приведший парашютиста к гибели.

В целях упрощения задачи далее мы исключим из рассмотрения какие-либо инциденты в момент отделения парашютиста от самолета.

Дерево событий отражает последовательность развития событий во времени и для рассматриваемого примера представлено на рис. 1.

Рис 1. Дерево событий прыжка парашютиста, приведшего его к гибели

Дерево отказов позволяет выявить причинно-следственные связи событий, приведших к возникновению чрезвычайной ситуации и/или нежелательного события.

То есть в нашем случае дерево отказов − это графическое представление логических связей между гибелью парашютиста и инициирующими его событиями.

Построение дерева отказов гибели парашютиста (как и любого другого дерева отказов) осуществляется, начиная с нежелательного события (то есть с гибели парашютиста), до тех пор, пока не будут выявлены все исходные (инициирующие) события.

Верхний фрагмент дерева отказов представлен на рис. 2.

Фрагмент дерева отказов, связанный с гибелью парашютиста при раскрытии одного из парашютов, представлен на рис. 3.

Объединяя рис. 2 и рис. 3, получим дерево отказов прыжка парашютиста, приведшего его к гибели (рис. 4).

Оптимизируем построенное дерево отказов с помощью операции «XOR» (рис. 5).

Таким образом, применение операции «XOR» («сумма по модулю 2») позволяет представить дерево отказов в более компактном виде (рис. 6).

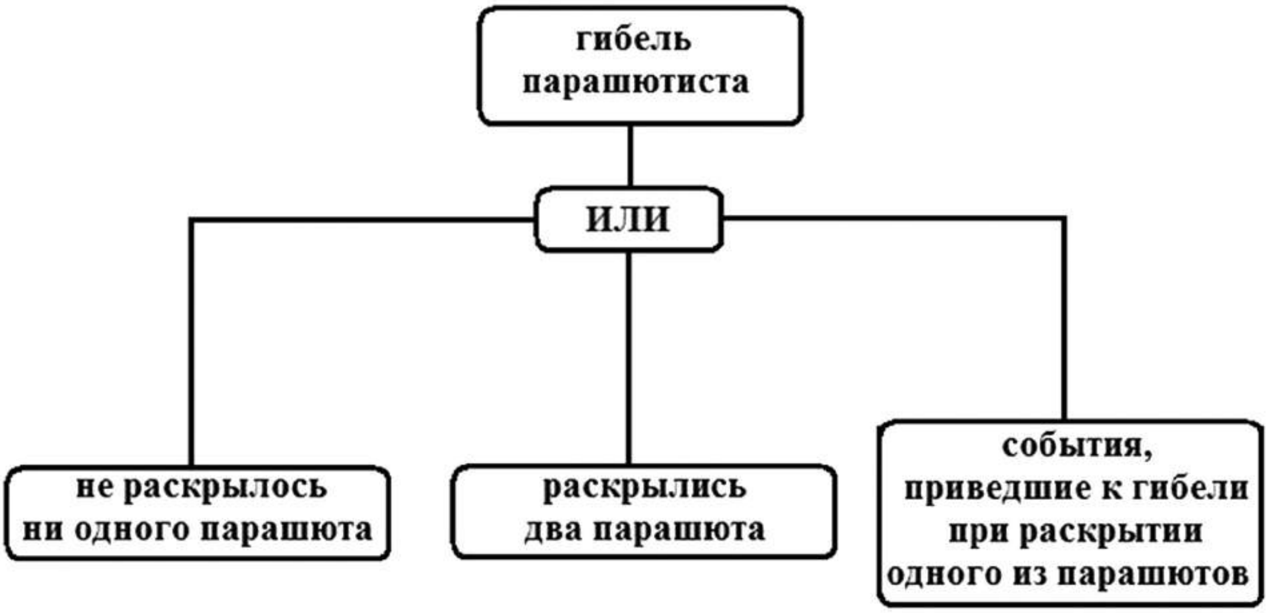


Рис. 2. Верхний фрагмент дерева отказов

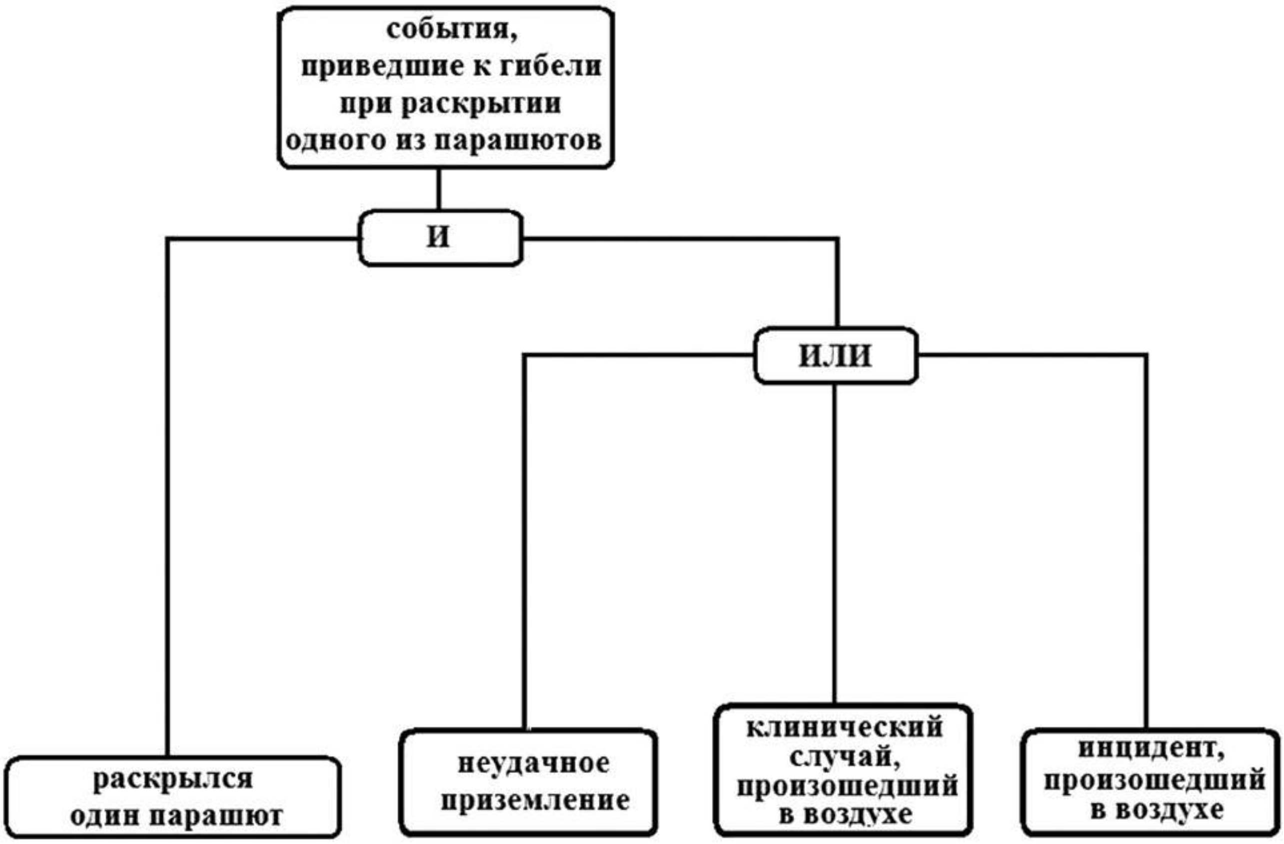


Рис. 3. Фрагмент дерева отказов, связанный с гибелью парашютиста при раскрытии одного из парашютов

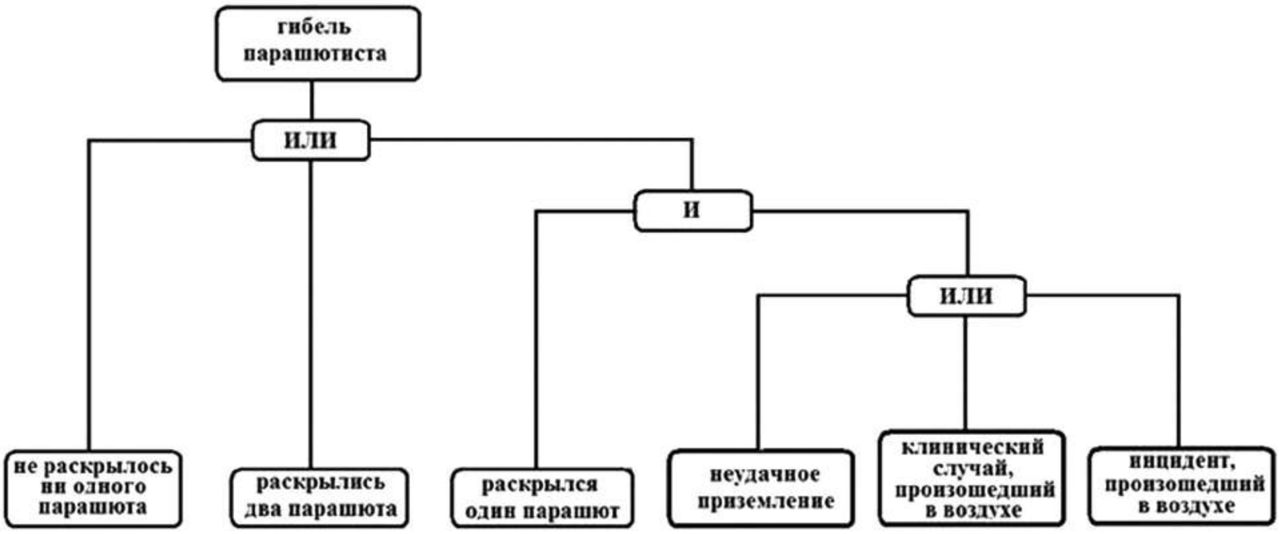


Рис. 4. Дерево отказов прыжка парашютиста, приведшего его к гибели

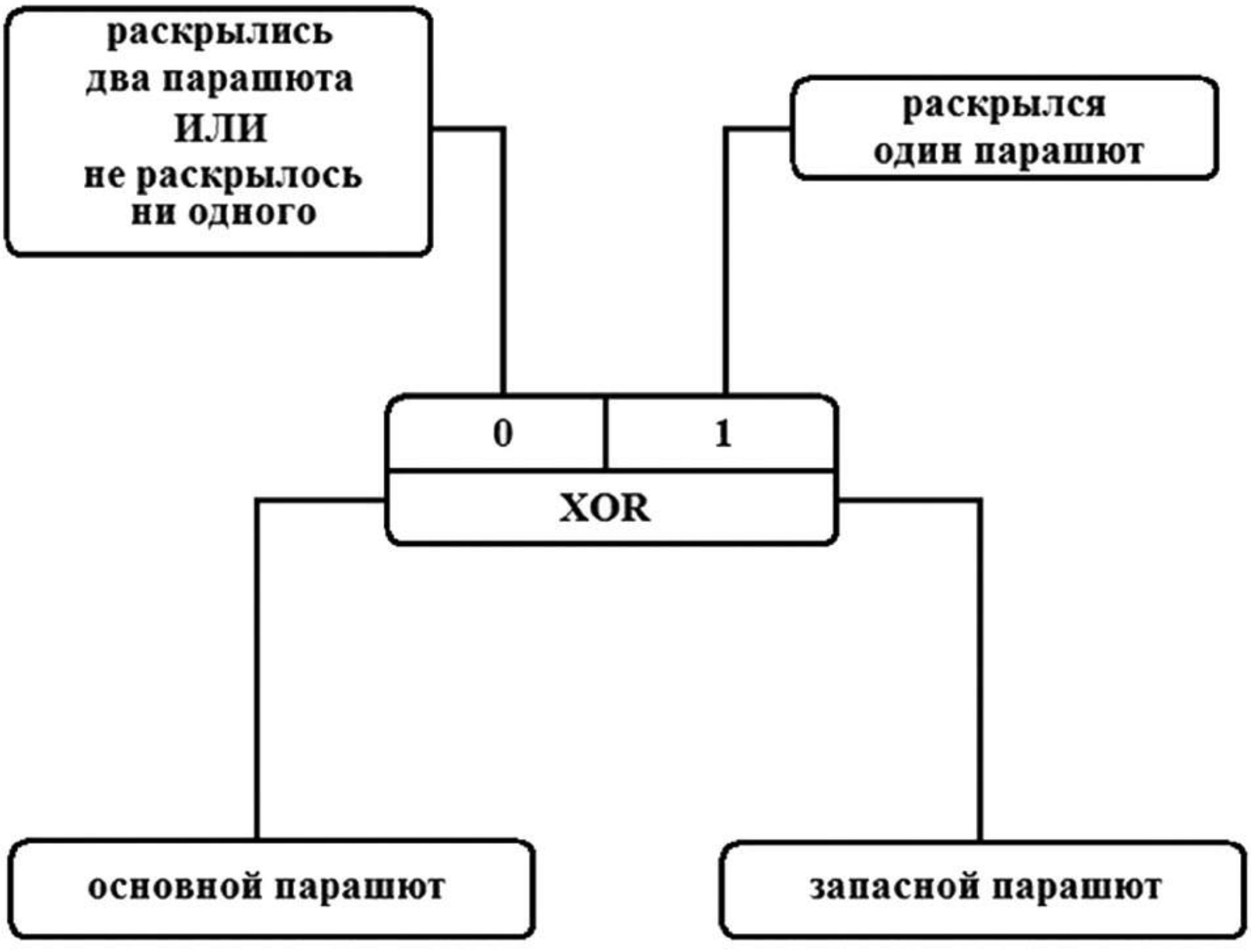


Рис. 5. Графическое представление действия операции «XOR»

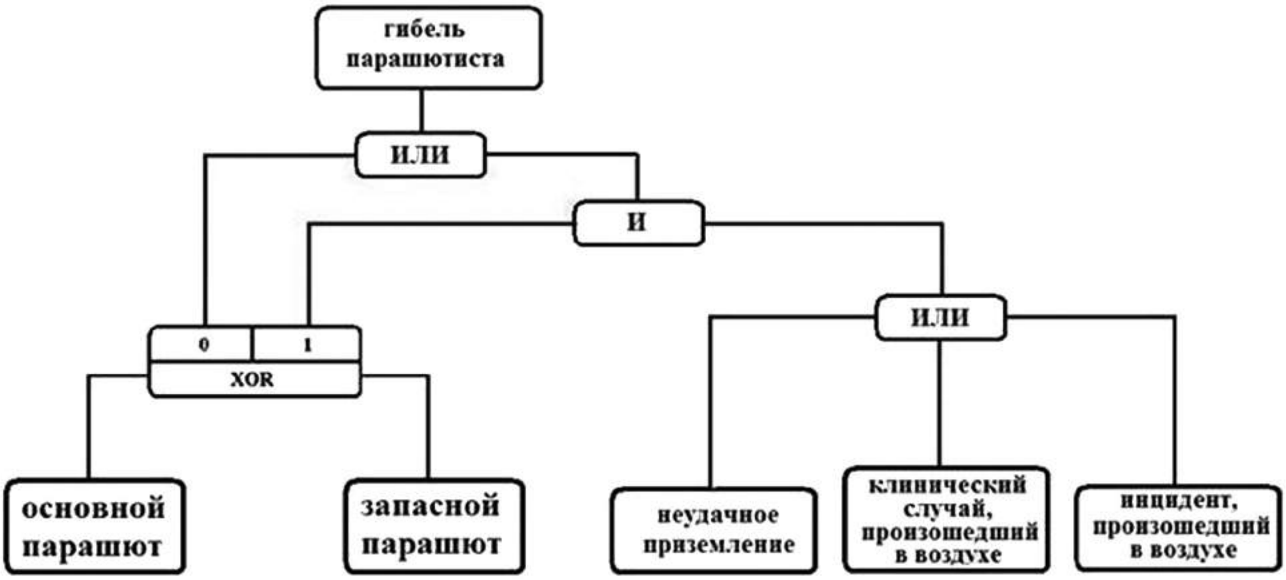


Рис. 6. Дерево отказов прыжка парашютиста, приведшего его к гибели

Построение подобных деревьев, в свою очередь, широко используется в задачах оценки риска чрезвычайных ситуаций и катастроф.

Таким образом, алгебра высказываний получает важное прикладное значение в теории рисков и теории надёжности сложных систем.

1.2. Элементы теории множеств

Теория множеств играет фундаментальную роль во всех разделах теоретической и прикладной математики, в частности: в системном анализе, в процессах математической формализации структуры исследуемых систем и системных задач [4].

Строго говоря, термин «**множество**» является фундаментальным неопределяемым, то есть аксиоматическим, понятием современной математики. Это не должно «смущать», поскольку даже в евклидовой геометрии тоже есть неопределяемые понятия – это точка, прямая и плоскость.

Однако в прикладных целях достаточно ограничиться известным наивным определением множества, данным Георгом Кантором: **множество есть произвольная**, в общем случае, неупорядоченная **совокупность попарно различающихся объектов – элементов этого множества**. Причём считается, что каждый элемент множества входит в это множество только один раз, то есть, хотя повторение элементов допустимо, но они считаются одним элементом.

В приложениях термин «**множество**» и термин «**класс**» считаются синонимами. Причём использование термина «класс» предпочтительно в задачах классификации.

Как правило, множества традиционно обозначаются большими буквами английского алфавита с индексами или без них.

Высказывание «Элемент x принадлежит множеству A» записывают следующим образом: $x \in A$. Но иногда для обозначения этого же высказывания используют обратное отношение $A \ni x$, означающее, что множество ***содержит элемент*** . Отрицание этого высказывания, то есть высказывание «Элемент x не принадлежит множеству A», записывают следующим образом: $x \notin A$ либо $A \not\ni x$, соответственно.

Конечные множества, то есть множества, содержащие конечное число элементов, обычно задают в виде списка элементов, в котором элементы множества перечисляются через запятую, а сам список элементов обязательно заключают в фигурные скобки.

Пример. Рассмотрим множество:

$$A = \{7, 0, 2, 1\}.$$

В этом примере $0 \in A$, а $8 \notin A$.

Пример. Пусть множество A есть множество уровней опасности, соответствующее трём возможным цветам светофора, то есть:

$$A = \{\text{зелёный, жёлтый, красный}\}.$$

Ясно, что, например, чёрный цвет не принадлежит множеству a.

Пример. Рассмотрим следующее множество:

$$A = \{4, 5, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 5\}.$$

С точки зрения данного выше определения порядок следования элементов в множестве не имеет никакого значения и одинаковые элементы считаются просто копиями одного и того же элемента, то есть:

$$A = \{4, 5, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 2, 1, 5, 4\}.$$

Таким образом, множество A содержит пять элементов.

Пример. Множество людей, пострадавших в конкретной чрезвычайной ситуации.

Пример. Множество целевых показателей государственной программы «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций, обеспечение пожарной безопасности и безопасности людей на водных объектах».

Пример. Множество чрезвычайных ситуаций, произошедших на территории Российской Федерации за период с 2000 по 2020 год.

Пустое множество по определению не содержит ни одного элемента, обозначается символом $\varnothing$ и соответствует пустому списку элементов:

$$\varnothing = \{\}.$$

Пустое множество имеет естественный аналог в алгебре высказываний – ноль как логически противоречивое высказывание.

Однако кроме конечных существуют и **бесконечные множества**.

Пример. В системном анализе данных часто используются такие бесконечные множества как множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ и другие.

Универсальное множество – это непустое множество U, содержащее все элементы, рассматриваемые в контексте поставленной системной задачи. Разумеется, универсальное множество может быть как конечным, так и бесконечным в зависимости от специфики конкретной задачи.

Универсальное множество U имеет естественный аналог в алгебре высказываний – единица как тавтология.

Но в отличие от логической единицы в алгебре высказываний и от пустого множества, которое всегда единственно, **выбор универсального множества неоднозначен и во многом определяется целями исследования и спецификой конкретной прикладной проблемы**.

Пример. В теории вероятностей пустое множество $\varnothing$ называют **невозможным событием**, а всё пространство элементарных событий Ω (универсальное множество) называют **достоверным событием**, соответственно.

Вероятность невозможного события равна нулю, то есть, если событие A – невозможное, то вероятность его реализации равна нулю:

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0;$$

$$(A = \varnothing) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) = 0).$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Вероятность достоверного события равна единице, то есть, если событие достоверно, то вероятность его реализации равна единице:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1;$$

$$(A = \Omega) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) = 1).$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Характеристическая функция (**индикатор**) множества A определяется для каждого элемента $x \in U$ как истинность или ложность высказывания о принадлежности элемента x множеству A:

$$\mu_A(x) = |(x \in A)| = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}. \quad (22)$$

Таким образом, областью определения индикатора является универсальное множество U, заданное в контексте исследуемой проблемы. Причём индикатор принимает значение «1» на всех элементах множества инность или ложность высказывания о принадлежности элемента x множеству A и значение «0» на любом элементе, не принадлежащему множеству инность или ложность высказывания о принадлежности элемента x множеству A, то есть является **мерой принадлежности** элемента множеству.

Пример. Индикатор пустого множества тождественно равен нулю, а индикатор универсального множества тождественно равен единице:

$$\mu_\varnothing(x) = 0 \quad \text{и} \quad \mu_U(x) = 1.$$

Перейдём к рассмотрению **отношений между множествами**.

Подобно тому, как для высказываний существует логическое следствие, в теории множеств вводят аналогичное отношение – **теоретико-множественное включение**.

Дадим вначале содержательное определение этого понятия.

Множество A есть **подмножество** множества B (а множество B есть **надмножество** множества A), если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.

Отношение включения между множествами A и B традиционно обозначается следующим образом: $A \subset B$. Но иногда для обозначения этого же высказывания используют и обратное отношение $A \supset B$, означающее, что множество B содержит A в качестве подмножества.

Высказывание $A \subset B$, как и высказывание $B \supset A$, означает следующее:

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B); \tag{23}$$

$$(A \subset B) \Leftrightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in B)). \tag{24}$$

Включение множеств означает неравенство индикаторов:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\mu_A(x) \leq \mu_B(x)). \tag{25}$$

Таким образом, теоретико-множественное включение $(A \subset B)$ аналогично логическому следствию $(A \Rightarrow B)$ в алгебре высказываний.

Это отношение наглядно иллюстрирует рис. 7.

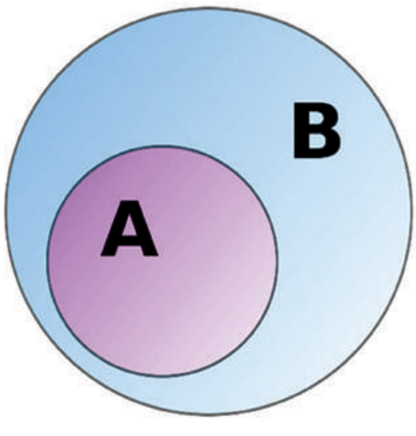


Рис. 7. Множество A есть подмножество множества B

В частности, пустое множество является подмножеством любого множества.

Кроме того, так как элементы, не принадлежащие универсальному множеству, заведомо исключаются из рассмотрения, то любое множество, с которым имеет дело исследователь в контексте конкретной прикладной задачи, всегда является подмножеством универсального множества.

Итак, для любого множества A мы всегда имеем вложение:

$$\varnothing \subset A \subset U. \tag{26}$$

Пример. $\{5, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пример. Множество аспирантов в группе моложе 30 лет является подмножеством множества всех аспирантов группы.

Пример. Множество чрезвычайных ситуаций природного характера, произошедших в Российской Федерации до конца 2021 года, является подмножеством в множестве всех чрезвычайных ситуаций, произошедших в Российской Федерации до конца 2021 года.

Пример. Множество чрезвычайных ситуаций, произошедших в Южном федеральном округе в 2021 году, является подмножеством чрезвычайных ситуаций, произошедших в Российской Федерации в 2021 году.

Отношение равенства множеств. Подобно тому, как для высказываний существует отношение логической эквивалентности, в теории множеств вводят аналогичное понятие – равенство множеств.

Множества A и B являются **равными**, если они содержат одни и те же элементы. Отношение равенства между множествами A и B записывается кратко следующим образом: $A = B$.

Это высказывание означает следующее:

$$(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B); \tag{27}$$

$$(A = B) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Leftrightarrow ((x \in A) \leftrightarrow (x \in B)). \tag{28}$$

Равенство множеств означает равенство индикаторов:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\mu_A(x) = \mu_B(x)). \tag{29}$$

Таким образом, теоретико-множественное равенство $A = B$ аналогично логической эквивалентности ($A \Leftrightarrow B$) в алгебре высказываний.

Способы задания множеств. Существует три способа задания множеств:

- явное перечисление элементов множества;
- задание множества через характеристический предикат;
- задание множества через теоретико-множественные операции.

Первый способ – явное перечисление элементов множества в фигурных скобках – подходит лишь к конечным множествам. Соответствующие примеры приведены выше.

Второй способ – задание множества через характеристический предикат, то есть через характеристическое свойство, которым обладает каждый элемент этого множества и которым не обладают элементы, не принадлежащие этому множеству.

Пусть $P_A(x)$ – предикат, то есть высказывание, истинность или ложность которого зависит от конкретного значения переменной (аргумента) $x \in U$.

Тогда запись $A = \{x|P_A(x)\}$ означает, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда высказывание $P_A(x)$ истинно, то есть:

$$A \subset U; \tag{30}$$

$$(x \in A) \Leftrightarrow (P_A(x)). \tag{31}$$

Также говорят, что множество содержит те и только те элементы, которые обладают характеристическим свойством P_A.

Ясно также, что индикатор заданного таким образом множества:

$$\mu_A(x) = |(x \in A)| = |P_A(x)|. \tag{32}$$

Этот способ является наиболее универсальным, поскольку позволяет описывать любые множества: как конечные, так и бесконечные.

Пример. Пусть универсальное множество U – множество аспирантов группы, а множество задано через характеристический предикат:

($x \in A$) $\Leftrightarrow$ (x моложе 30 лет).

Следовательно, множество A содержит тех и только тех аспирантов рассматриваемой группы, возраст которых составляет менее 30 лет.

Пример. $A = \{x|x$ – большая буква английского алфавита$\}$.

Пример. Бесконечное множество A чётных чисел формально можно задать следующим образом. Пусть $U = \mathbb{Z}$, то есть в качестве универсального множества выбрано множество целых чисел. Тогда имеем:

$$A \subset \mathbb{Z};$$

$$(x \in A) \Leftrightarrow (x \vdots 2).$$

Третий способ – через теоретико-множественные операции над известными множествами.

Перейдём к рассмотрению этих операций.

По аналогии с высказываниями, над которыми, как мы уже знаем, выполняются логические операции, над множествами тоже можно выполнять определённые действия, то есть теоретико-множественные операции. Рассмотрим базовые операции.

Объединение множеств A и B есть множество $A \cup B$:

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \left(\left(x \in A\right) \vee \left(x \in B\right)\right). \tag{33}$$

Содержательный смысл этой операции (включить всё) иллюстрируется на рис. 8.

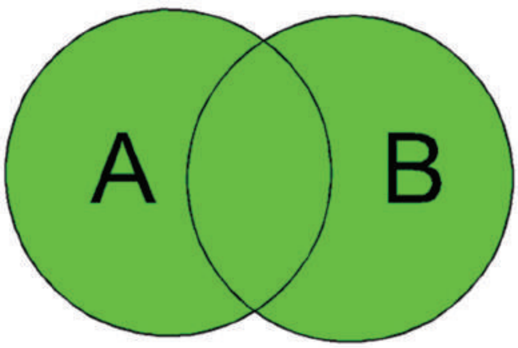


Рис. 8. Объединение множеств

Пример.

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Аналогично определяется объединение произвольной, в том числе и бесконечной, совокупности множеств.

Пересечение множеств A и B есть множество $A \cap B$:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big). \tag{34}$$

Содержательный смысл этой операции – выделить общее, что наглядно иллюстрирует заштрихованная область на рис. 9.

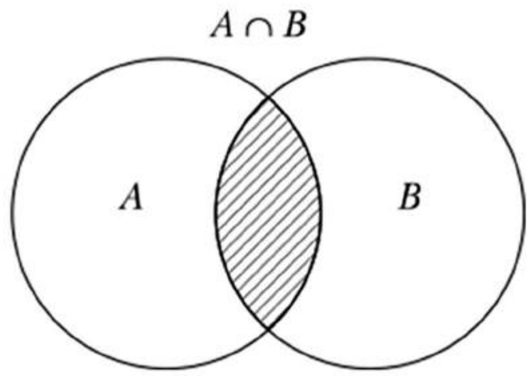


Рис. 9. Пересечение множеств

Пример.

$$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = 3.$$

Аналогично определяется пересечение произвольной, в том числе и бесконечной, совокупности множеств.

Если пересечение множеств есть пустое множество, то говорят, что рассматриваемые множества не пересекаются.

Интересно, что использование операций объединения и пересечения позволяет дать **аксиоматическое определение включения** множеств, то есть такое определение, в котором не используется содержательный смысл данного выше определения отношения включения. Причём это можно сделать, например, следующими двумя эквивалентными способами:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A); \tag{35}$$

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B). \tag{36}$$

Разность множеств A и B есть множество $A \backslash B$:

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)). \qquad (37)$$

Содержательный смысл этой операции состоит в исключении из множества A элементов, принадлежащих множеству B, то есть тех элементов, которые являются общими для рассматриваемых множеств (рис. 10).

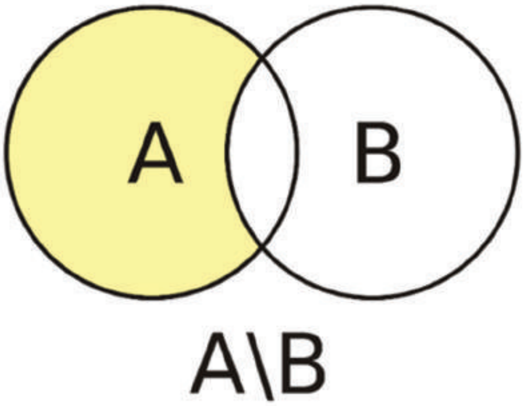


Рис. 10. Разность множеств: *A* без *B*

Примеры.

$$\{1, 2, 3\} \backslash \{3, 4\} = \{1, 2\};$$
$$\{3, 4\} \backslash \{1, 2, 3\} = \{4\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B есть множество $A \Delta B$:

$$(x \in A \Delta B) \Leftrightarrow ((x \in A) \oplus (x \in B)). \qquad (38)$$

Содержательный смысл этой операции для **двух** множеств в исключении общих элементов из объединения этих двух множеств (рис. 11).

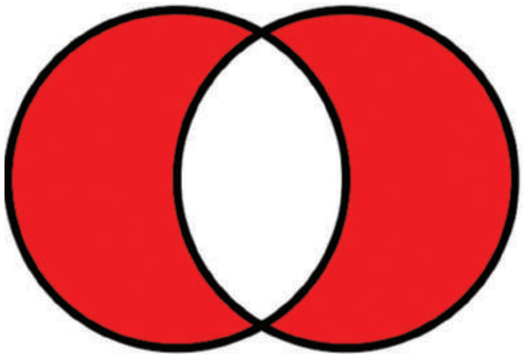


Рис. 11. Симметрическая разность двух множеств

Рис. 5 визуализирует также следующее важное свойство:

$$A \Delta B = B \Delta A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (39)$$

Пример.

$$\{1, 2, 3\} \, \Delta \, \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

С помощью таблиц истинности, построенных для соответствующих высказываний, можно доказать, что симметрическая разность обладает тремя важными для приложений свойствами.

Во-первых, пустое множество является нейтральным элементом симметрической разности:

$$A \Delta \varnothing = A. \quad (40)$$

Во-вторых, имеет место критерий равенства двух множеств:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \Delta B = \varnothing). \quad (41)$$

В-третьих, имеет место ассоциативность симметрической разности:

$$(A \, \Delta \, B) \, \Delta \, C = A \, \Delta \, (B \, \Delta \, C). \quad (42)$$

Это позволяет не указывать скобки в выражениях типа $A \, \Delta \, B \, \Delta \, C$.

И, наконец, имеет место дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности:

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C). \tag{43}$$

По аналогии с симметрической разностью и операцией сумма по модулю 2, с учётом коммутативности и ассоциативности позволяет легко вычислять симметрическую разность любого числа множеств.

Пример. Симметрическая разность трёх множеств наглядно иллюстрируется на рис. 12.

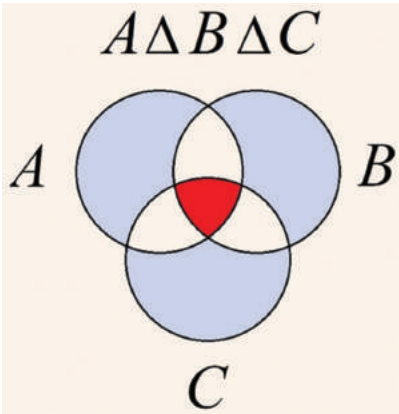


Рис. 12. Симметрическая разность трёх множеств

Обратите внимание, что здесь результирующее множество $A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$ содержит не только те элементы отдельных множеств A, B, C которые не входят в попарные пересечения $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, но в отличие от симметрической разности двух множеств множество $A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$ содержит также все элементы совместного пересечения трёх множеств $A \cap B \cap C$, $B \cap C$.

Действительно, для $x \in (A \cap B \cap C)$ высказывание

$$(x \in A) \oplus (x \in B) \oplus (x \in C)$$

истинно, поскольку остаток от целочисленного деления 3 на 2 равен 1.

Пример.

$$\{1, 2, 3, 5\} \,\Delta\, \{3, 4, 7\} \,\Delta\, \{4, 3, 0, 2\} = \{0, 1, 3, 5, 7\}.$$

Дополнение к множеству A есть множество $\overline{A}$, которое в отличие от определённых выше операций всегда определяется относительно заданного универсального множества U и содержит те и только те его элементы, которые не принадлежат рассматриваемому множеству A, то есть:

$$\overline{A} \subset U; \tag{44}$$

$$\left(x \in \overline{A}\right) \Leftrightarrow \left(x \notin A\right). \tag{45}$$

Иллюстрация дополнения представлена на рис. 13.

Рис. 13. Дополнение к множеству

Очевидно, что имеют место равенства:

$$\overline{A} = U \backslash A; \tag{46}$$

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing\ . \tag{47}$$

Пример.

$$\left(U = \{1, 2, 3, 4, 5\}\right) \Rightarrow \left(\overline{\{1, 2, 3\}} = \{4, 5\}\right).$$

Таким образом, в отличие от всех остальных операций, результат операции дополнения существенно зависит от выбора универсального множества U.

Важно запомнить следующее равенство:

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}. \tag{48}$$

По аналогии с алгеброй высказываний имеем:

$$\left(A \subset B\right) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \subset \overline{A}\right). \tag{49}$$

Более того, по аналогии с алгеброй высказываний над множествами можно формально определить операцию «импликация», причём:

$$A \to B = \overline{A} \cup B = \overline{\overline{\overline{A} \cup B}} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \backslash B}. \tag{50}$$

Кроме того, можно доказать следующую цепочку эквивалентных высказываний:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \to B = U). \tag{51}$$

Эта цепочка интересна тем, что позволяет дать чисто формально несколько соответствующих, эквивалентных между собой, аксиоматических определений отношения теоретико-множественного включения $A \subset B$.

Пример. Каждый регион, то есть субъект Российской Федерации, характеризуется некоторым множеством опасностей (факторов риска, источников ЧС), характерных для данного региона.

Множество опасностей на территории Российской Федерации есть объединение множеств опасностей всех регионов.

Множество общих опасностей, присущих каждому региону, есть пересечение множеств опасностей всех регионов.

Множество опасностей, характерных для любого конкретного региона, является подмножеством множества опасностей, характерных для территории Российской Федерации.

Множество опасностей региона A, не характерных для региона B, есть разность множеств опасностей $A \setminus B$.

Если в качестве универсального множества опасностей U принять множество всевозможных опасностей на территории Российской Федерации, то дополнение к множеству опасностей, характерных для некоторого региона, есть множество опасностей, характерных для территории Российской Федерации, но не характерных для рассматриваемого региона, причём:

$$\overline{A} = U \setminus A. \tag{52}$$

Можно показать, что алгебра множеств полностью аналогична алгебре высказываний. В частности, в полной аналогии с алгеброй высказываний, в теории множеств вводится понятие «формулы» и выполняются все законы алгебры высказываний (если дизъюнкцию заменить на объединение, конъюнкцию – на пересечение, а отрицание – на дополнение), также сохраняются принцип дуальности и обобщённое правило де Моргана.

Диаграмма Венна (круги Эйлера) помогают визуализировать результаты выполнения теоретико-множественных операций, а также угадать (но не доказать!) некоторые важные законы алгебры множеств.

На диаграммах Венна универсальное множество изображают в виде прямоугольной области, а любое другое множество – внутри этой области в виде круга или другой геометрической фигуры.

Если заранее известно, что множества не пересекаются, соответствующие круги не должны иметь общих точек. При отсутствии такой априорной информации круги изображают пересекающимися.

Если заранее известно, что одно множество является подмножеством другого множества, то круг, соответствующий подмножеству, изображается внутри круга включающего его множества.

Если априори ничего не известно про взаимное положение рассматриваемых множеств, то соответствующие круги (области) изображают пересекающимися, причём ни одна из областей не должна находиться целиком внутри другой.

Пример. Диаграмма Венна для симметрической разности двух множеств представлена на рис. 14.

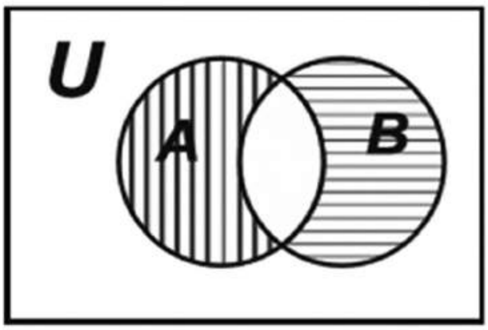


Рис. 14. Диаграмма Венна для симметрической разности двух множеств

Пример. На рис. 15 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая представления Канта о формах государства.

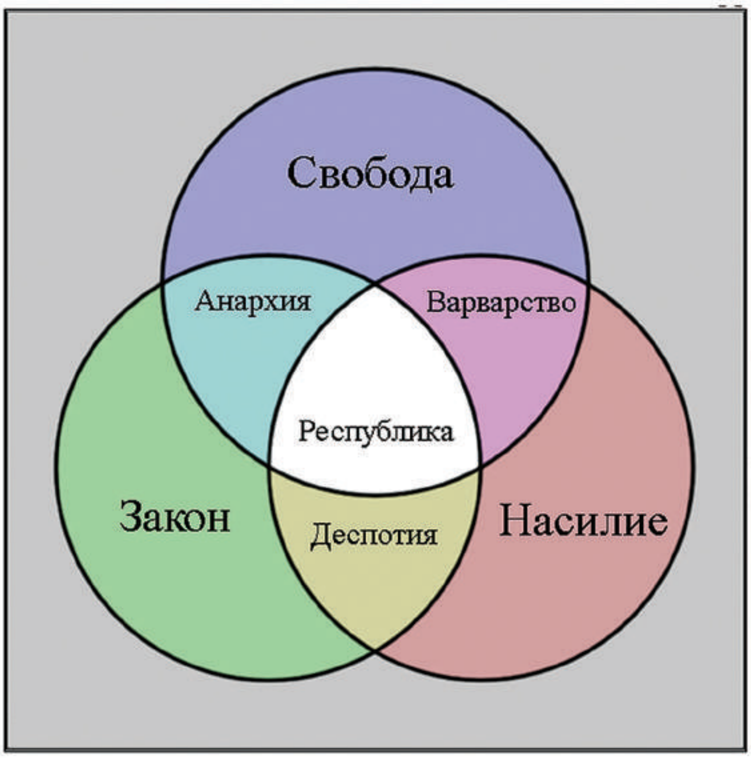


Рис. 15. Диаграмма Венна, иллюстрирующая представления Канта о формах государства

Мощность множества A обозначается $|A|$ и для **конечного** множества A определяется как число его элементов.

Примеры.

$$|\varnothing| = 0$$

$$|\{\varnothing\}| = 1$$

$$|\{5,6,7\}| = 3$$

Мощность объединения произвольных двух **конечных** множеств вычисляется по следующей формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (53)$$

В частности, мощность объединения двух **непересекающихся конечных** множеств равна сумме их мощностей:

$$(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (|A \cup B| = |A| + |B|). \quad (54)$$

Более того, можно доказать, что мощность объединения произвольного конечного числа **попарно непересекающихся** конечных множеств равна сумме мощностей этих множеств.

Если же априорная информация о попарной непересекаемости объединяемых конечных множеств отсутствует, то есть множества являются произвольными, то формула усложняется.

Пример. Вычислим мощность объединения произвольных трёх конечных множеств.

Имеем:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|;$$

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|;$$

$$|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Таким образом, искомая формула имеет следующий вид:

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|B \cap C\right| - A \cap C + \left|A \cap B \cap C\right|. \quad (55)$$

С увеличением числа объединяемых множеств формула расчёта мощности существенно усложняется.

Как видим, даже такой, казалось бы, простой вопрос, как вычисление мощности объединения конечных множеств, приводит к довольно сложным формулам. В свою очередь, подобные формулы играют важную роль в теории сложности и в задачах системного анализа рисков чрезвычайных ситуаций.

Для **бесконечных множеств** понятие мощности не определяют.

Вместо этого даётся определение множеств одинаковой **мощности**, а именно: говорят, что д**ва множества имеют равную мощность**, если между их элементами существует **взаимно однозначное соответствие**.

Это определение удобно, так как подходит для любых множеств: как конечных, так и бесконечных.

Пример. Каждый геометрический отрезок как множество содержит бесконечное множество точек. Рассмотрим два отрезка разной длины. Какой из них содержит больше точек?

Вначале интуитивно нам кажется, что более длинный отрезок содержит больше точек, чем короткий.

Однако на самом деле это не так, что наглядно иллюстрирует рис. 16.

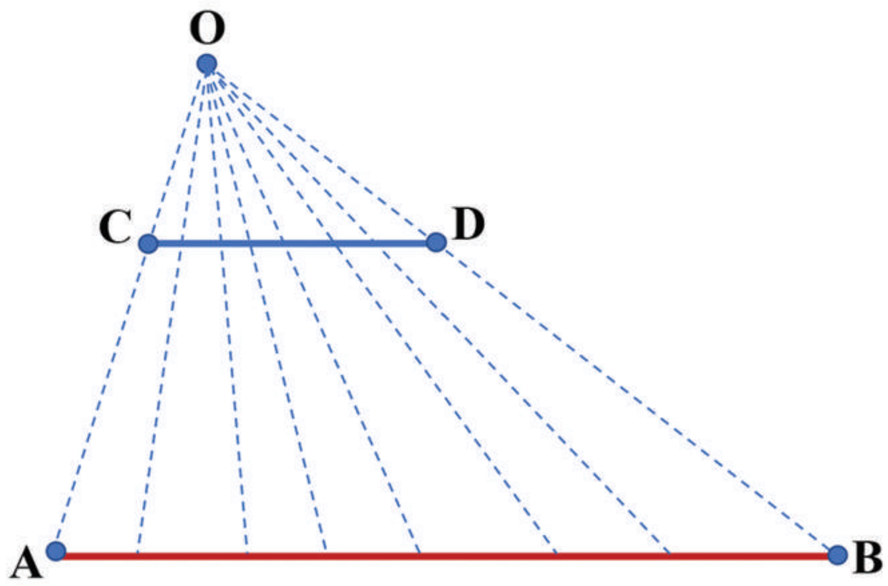


Рис. 16. Математическое обоснование равномощности любых геометрических отрезков разной длины

Таким образом, любые два геометрических отрезка содержат хотя и бесконечное, но, тем не менее, «одно и то же число». При этом, конечно, длины этих отрезков различны.

Бесконечное множество называют **счётным**, если все его элементы можно пронумеровать натуральными числами.

Счётным является не только множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, но и множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и даже множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

А вот множество действительных чисел $\mathbb{R}$ не является счётным. Можно доказать равномощность множества $\mathbb{R}$ и любого геометрического отрезка. Поэтому множество $\mathbb{R}$, как и любой отрезок, является **континуальным**.

Пусть теперь X – произвольное множество (конечное или бесконечное).

Тогда 2^X есть **булеан**, то есть **множество всех подмножеств множества** X:

$$\left(A \in 2^X\right) \Leftrightarrow \left(A \subset X\right). \qquad (56)$$

Примеры.

$$2^{\varnothing} = \{\varnothing\};$$

$$2^{\{a\}} = \{\varnothing, \{a\}\};$$

$$2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\};$$

$$2^{\{a,b,c\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Каждый элемент A булеана 2^X, очевидно, характеризуется индикатором, то есть отображением, действующим на универсальном множестве $U = X$.

$$X \overset{\mu_A}{\to} \{0,1\}; \tag{57}$$

$$\mu_A(x) = |(x \in A)| = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}. \tag{58}$$

Нетрудно видеть, что мощность булеана 2^X равна мощности множества всех таких отображений μ_A, действующих из множества X в произвольное множество мощности 2, причём обозначение 2^X оправдано равенством:

$$|2^X| = 2^{|X|}. \tag{59}$$

В системных задачах множество X обычно интерпретируют как **множество не взаимодействующих между собой элементов** системы, в которой каждый **элемент** может находиться в одном из **двух возможных состояний**, то есть $Y = \{0,1\}$ – это множество допустимых состояний каждого элемента. Тогда булеан 2^X обозначает множество **всех возможных состояний такой системы**.

Можно доказать, что если множество X счётное, то булеан 2^X континуален.

Обобщением понятия «булеан» является операция возведения множества в степень, показателем которой, в свою очередь, является какое-то другое множество. Рассмотрим эту ситуацию по аналогии с предыдущей.

Пусть множество X есть **множество не взаимодействующих между собой элементов** некоторой системы, а Y есть **множество допустимых состояний** каждого элемента, то есть каждый элемент $x \in X$ системы может пребывать в любом допустимом состоянии $y \in X$.

В связи с этим рассмотрим теперь отображение R, то есть действие, результатом применения которого к элементу x является его состояние y:

$$Rx = y. \tag{60}$$

Обозначим через Y^X множество **всех отображений** $X^R \to Y$, то есть Y^X представляет собой **все возможные состояния такой системы**, причём само обозначение Y^X оправдано соответствующим равенством мощностей:

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}. \tag{61}$$

А **обобщённым состоянием** рассмотренной системы называют любое подмножество в множестве всех возможных состояний системы.

Это означает, что множество возможных обобщённых состояний представляет собой булеан на множестве состояний системы, то есть получаем множество 2^{Y^X} и соответствующее равенство для мощностей:

$$\left|2^{Y^X}\right| = 2^{|Y|^{|X|}}. \tag{62}$$

1.3. Системы множеств

Система множеств – это **непустое** множество S, элементами которого являются подмножества заданного универсального множества U.

Кроме элементов (множеств) в системах определяются операции над элементами системы, обладающие определёнными свойствами, причём система должна быть замкнутой относительно этих операций.

Системы множеств широко применяются в самых разных приложениях. В частности, без использования приведенных выше понятий невозможно было создание ни теории меры и интеграла Лебега, ни, как следствие, – теории вероятностей, без которой, в свою очередь, немыслим системный анализ рисков чрезвычайных ситуаций и катастроф [5].

Кроме того, на основе аналогии алгебры высказываний и алгебр множеств была создана более общая теория булевых алгебр, которая используется при формализации логики поведения сложных систем разной природы, в частности: в теории автоматов и в теории управления (кибернетике).

Важнейшими примерами систем множеств являются алгебры множеств и кольца множеств.

Алгебра множеств – это система $\mathcal{A}$ подмножеств заданного универсального множества U, замкнутая относительно операций дополнения, объединения и пересечения, то есть:

$$\mathcal{A} \subset 2^U; \tag{63}$$

$$(X \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\overline{X} \in \mathcal{A}); \tag{64}$$

$$((X \in \mathcal{A}) \wedge (Y \in \mathcal{A})) \Rightarrow ((X \cup Y \in \mathcal{A}) \wedge (X \cap Y \in \mathcal{A})). \tag{65}$$

Если любая алгебра множеств обязательно содержит в качестве элементов пустое множество $\varnothing$, то конечная алгебра множеств всегда содержит 2^n элемента (множества).

Самая «бедная» алгебра множеств содержит два элемента: пустое множество и универсальное множество:

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, U\}.$$

Самая «богатая» алгебра множеств – это множество всех подмножеств этого множества U, то есть булеан $A = 2^U$.

Пример. Пусть $U = \{a, b, c\}$. Тогда булеан имеет вид:

$$\mathcal{A} = 2^U = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Пример. Пусть $X \subset U$ и $X \cup \overline{X} = U$. Тогда система четырёх множеств

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, X, \overline{X}, U\}$$

является алгеброй множеств.

Пример. Сигма-алгебра событий в теории вероятностей является алгеброй множеств. Эта алгебра множеств является ярким примером булевой алгебры, содержащей помимо нуля (невозможное событие) и единицы (достоверное событие) также другие элементы (случайные события).

Кольцо множеств – это система $\mathcal{R}$ подмножеств заданного универсального множества U, замкнутая относительно операций симметрической разности и пересечения.

$$\mathcal{R} \subset 2^U; \tag{66}$$

$$((X \in \mathcal{R}) \wedge (Y \in \mathcal{R})) \Rightarrow ((X \Delta Y \in \mathcal{R}) \wedge (X \cap Y \in \mathcal{R})). \tag{67}$$

Кольцо множеств $\mathcal{R}$ всегда содержит пустое множество: $\varnothing \in \mathcal{R}$.

Пример. Любая алгебра множеств является кольцом.

Однако далеко не каждое кольцо множеств является алгеброй множеств.

Пример. Пусть $X \subset U$ и $Y \subset U$, причём $X \cap Y = \varnothing$.

Тогда система множеств

$$\mathcal{R} = \{\varnothing, X, Y, X \cup Y\}$$

является кольцом множеств.

Можно доказать, что кольцо множеств является алгеброй тогда и только тогда, когда оно содержит универсальное множество U.

1.4. Декомпозиция булевых формул в виде совершенных нормальных форм

Практическая реализация логики работы многих сложных целенаправленных систем (таких как лифт, роботизированные спасательные комплексы, применяемые в МЧС России, а также другие автоматизированные системы, обладающие целенаправленным поведением) невозможна без применения системного подхода к анализу формул, возникающих в соответствующих булевых структурах, называемых также булевыми алгебрами, примерами которых являются алгебра высказываний, алгебры множеств и другие аналогичные им формальные системы.

В общем случае, формулы, возникающие в булевых алгебрах, и входящие в них переменные, разумеется, могут принимать значения, отличные от нуля и единицы, как это имеет место, например, в алгебрах множеств. Однако, к счастью, формулы однозначно определяются как функции переменных своими значениями на нулях и единицах, принимая соответствующие нулевые или единичные значения.

Таким образом, системный анализ формул в булевых структурах фактически сводится к их сужению и применению алгебры высказываний.

А практическая реализация системного подхода к анализу таких формул осуществляется путём их системной декомпозиции, приводящей к единственно возможному представлению исследуемых формул в виде так называемых совершенных дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм (СДНФ и СКНФ, соответственно).

Представление булевых формул в форме СДНФ и СКНФ иллюстрирует реализацию принципа системной декомпозиции и с этой точки зрения играет важную роль в системном анализе проблем, связанных с представлением информации и знаний, например, в экспертных системах.

В связи с этим рассмотрим соответствующие процедуры [2].

Дизъюнкт есть дизъюнкция различных переменных или их отрицаний.

Полный дизъюнкт содержит все переменные, над которыми рассматривается анализируемая формула.

Пустой дизъюнкт не содержит переменных и по определению считается равным **нулю**.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) есть конъюнкция конечного множества различных дизъюнктов.

КНФ является **совершенной (СКНФ)**, если все её дизъюнкты полные.

Представление любой формулы в виде **СКНФ единственно** и основано на том, что СКНФ ложна тогда и только тогда, когда хотя бы один входящий в неё полный дизъюнкт принимает ложное значение, что, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда все его слагаемые ложны.

Таким образом, для представления формулы в виде СКНФ необходимо построить полные конъюнкты на всех интерпретациях, на которых формула ложна. Причём переменные, имеющие на этой интерпретации истинные значения, включаются в соответствующий дизъюнкт с отрицанием.

Конъюнкт есть конъюнкция различных переменных или их отрицаний.

Полный конъюнкт содержит все переменные, над которыми рассматривается анализируемая формула.

Пустой конъюнкт не содержит переменных и по определению считается равным **единице**.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) есть дизъюнкция конечного множества различных конъюнктов.

ДНФ является **совершенной (СДНФ)**, если все её конъюнкты полные.

Представление любой формулы в виде **СДНФ единственно** и основано на том, что СДНФ истинна тогда и только тогда, когда хотя бы один входящий в неё полный конъюнкт принимает истинное значение, что, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда все его сомножители истинны.

Таким образом, для представления формулы в виде СДНФ необходимо построить полные конъюнкты на всех интерпретациях, на которых формула истинна. Причём переменные, имеющие на этой интерпретации нулевые значения, включаются в соответствующий конъюнкт с отрицанием.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие представление формул в виде СКНФ и СДНФ.

Пример. Рассмотрим формулу импликации:

$$\mathcal{F}\left(A,B\right)=A\rightarrow B.$$

Табл. 9 наглядно демонстрирует процесс построения СДНФ и СКНФ для рассматриваемой формулы.

Таблица 9

Построение СДНФ и СКНФ для импликации

A	B	$\mathcal{F}(A, B)$	Конъюнкты СДНФ	Дизъюнкты СКНФ
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	
0	1	1	$\overline{A} \wedge B$	
1	0	0		$\overline{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

Таким образом, представление импликации в формате СКНФ и СДНФ имеет следующий вид, соответственно:

$$\mathcal{F}(A,B) = A \to B = \overline{A} \vee B;$$

$$\mathcal{F}(A,B) = A \to B = (A \wedge B) \vee \left(\overline{A} \wedge B\right) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right).$$

Пример. Пусть таблица истинности для искомой формулы F имеет вид, соответствующий первым четырём столбцам табл. 10.

Таблица 10

Пример построения СДНФ и СКНФ

A	B	C	$\mathcal{F}(A, B, C)$	Конъюнкты СДНФ	Дизъюнкты СКНФ
0	0	0	0		$A \vee B \vee C$
0	0	1	0		$A \vee B \vee \overline{C}$
0	1	0	0		$A \vee \overline{B} \vee C$
0	1	1	1	$\overline{A} \wedge B \wedge C$	
1	0	0	0		$\overline{A} \vee B \vee C$
1	0	1	1	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	
1	1	0	1	$A \wedge B \wedge \overline{C}$	
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$	

Таким образом, формула $\mathcal{F}$ имеет следующее представление в СДНФ:

$$\mathcal{F}\left(A,B,C\right) = \left(A \wedge B \wedge C\right) \vee \left(A \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge C\right).$$

Эта же формула $\mathcal{F}$ имеет следующее представление в СКНФ:

$$\mathcal{F}\left(A,B,C\right) = \left(A \vee B \vee C\right) \wedge \left(A \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(A \vee \overline{B} \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee C\right).$$

Пример. Пусть булева формула задана вектором своих значений (11100101).

Очевидно, длину этого вектора можно представить следующим образом:

$$8 = 2^3.$$

Поэтому исследуемая формула зависит от трёх переменных. Процесс построения СКНФ и СДНФ иллюстрируется с помощью табл. 11.

Таблица 11

Пример построения СДНФ и СКНФ

A	B	C	$\mathcal{F}(A, B, C)$	Конъюнкты СДНФ	Дизъюнкты СКНФ
0	0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	
0	0	1	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	
0	1	0	1	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$	
0	1	1	0		$A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$
1	0	0	0		$\overline{A} \vee B \vee C$
1	0	1	1	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	
1	1	0	0		$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$	

Таким образом, формула имеет следующее представление в виде СКНФ и СДНФ, соответственно:

$$\mathcal{F} = \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right);$$

$$\mathcal{F} = \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee (A \wedge B \wedge C).$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение высказывания. Приведите примеры высказываний и утверждений, не являющихся высказываниями. Перечислите основные логические операции над высказываниями и постройте их таблицы истинности.

2. Дайте определение формулы алгебры высказываний, тавтологии и противоречия. Какие законы (тождества) могут быть выделены в качестве основных для любых булевых алгебр? Какие следствия выводятся из основных законов?

3. Сформулируйте определение логического следствия и логической эквивалентности формул алгебры высказываний. Приведите примеры.

4. Сформулируйте понятие дуальной формулы и обобщенное правило де Моргана.

5. Поясните содержательный смысл термина «множество» в контексте наивной теории множеств Кантора. Дайте определение индикатора множества. Дайте определение подмножества. Что такое пустое множество?

6. В чем сходство и различие между единицей в алгебре высказываний и универсальным множеством в алгебре множеств?

7. Перечислите основные способы задания множеств. Сформулируйте определения основных теоретико-множественных операций.

8. Сформулируйте определение мощности конечного множества и определение равномощных множеств. Чему равна мощность объединения двух произвольных конечных множеств? Чему равна мощность булеана?

9. Опишите алгоритм аналитического представления булевой функции в виде СДНФ и СКНФ по заданной таблице истинности.

Литература

1. *Лефевр В.А.* Алгебра совести / Пер. с англ. М.: Когито-Центр, 2003. 426 с.
2. *Зюзьков В.М.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособ. Томск: Эль Контент, 2015. 236 с.

3. 15 лекций по анализу риска чрезвычайных ситуаций: Учеб. пособ. / Под ред. В.Ю. Востокова. М.: МФТИ, 2010. 289 с.
4. Элементы теории множеств: Учеб.-метод. пособ./ Сост.: Т.В. Кулагина, Н.Б. Тихонова. Пенза: ПГУ, 2014. 32 с.
5. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.

2. Моделирование связей в структуре системы в контексте теории отношений

2.1. Декартово произведение

Как мы уже знаем, структура системы представляет собой множество взаимосвязанных между собой элементов. Термин «связь» широко используется в системном анализе. В связи с этим важно разобраться в том, что такое связь и как формально описывать (моделировать) межсистемные связи.

В современном системном анализе межсистемные связи принято интерпретировать как отношения между элементами, либо подсистемами. Но для того, чтобы понять смысл термина «отношение», сначала необходимо дать определение декартова произведения [1].

Декартово произведение множеств X и Y есть множество $X \times Y$, элементами которого являются **упорядоченные** пары вида (x, y), в которых первый аргумент принадлежит первому сомножителю X, а второй аргумент принадлежит второму сомножителю Y, соответственно:

$$((x, y) \in X \times Y) \Leftrightarrow ((x \in X) \wedge (y \in Y)). \qquad (68)$$

Каждая такая пара есть двухэлементный ковектор, то есть строка (x, y) в случае необходимости записывается как вектор, то есть столбец:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \times Y. \qquad (69)$$

Необходимость в таком векторном формате представления пары (x, y) возникает, например, в связи с необходимостью формализации вычислений, в которых матрица умножается на вектор-столбец.

Порядок перечисления пар (x, y) в множестве $X \times Y$ не имеет значения. А вот порядок следования координат внутри пары (x, y) имеет значение: сначала указывают компоненту первого, а затем второго сомножителя.

Пример. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}; \quad Y = \{y_1, y_2\}.$$

Тогда имеем:

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\};$$
$$Y \times X = \{(y_1, x_1), (y_2, x_1), (y_1, x_2), (y_2, x_2), (y_1, x_3), (y_2, x_3)\}.$$

Ясно также, что:

$$\begin{gathered} |X \times Y| = |X||Y| = 3 \cdot 2 = 6; \\ |X \times Y| = |Y \times X| = |X||Y|. \end{gathered} \tag{70}$$

Приведенный пример показывает то, что декартово произведение удобно интерпретировать геометрически как множество точек плоскости с соответствующими декартовыми координатами. Более того, часто такую интерпретацию применяют формально даже для нечисловых множеств.

Таким образом, **декартово произведение некоммутативно**, то есть в общем случае сомножители X и Y нельзя менять местами:

$$X \times Y \neq Y \times X. \tag{71}$$

Поэтому порядок следования координат внутри пары (x, y) имеет значение [1].

Определение декартова произведения нескольких множеств формулируется аналогично:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \\ \quad \vdots \\ x_n \in X_n \end{cases}. \tag{72}$$

В частности, при совпадении перемножаемых множеств возникает декартова степень множества:

$$X^1 = X; \tag{73}$$

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}; \tag{74}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \in X \\ x_2 \in X \\ \quad \vdots \\ x_n \in X \end{cases}. \tag{75}$$

Кроме того, **декартово произведение неассоциативно**, то есть:

$$X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z; \tag{76}$$

$$X \times Y \times Z \neq X \times (Y \times Z) \quad \text{и} \quad X \times Y \times Z \neq (X \times Y) \times Z. \tag{77}$$

Вообще, мощность декартова произведения любого количества множеств равна произведению мощностей перемножаемых множеств:

$$|X \times Y| = |X||Y|; \tag{78}$$

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1||X_2|\ldots|X_n|. \tag{79}$$

Поэтому мощность декартовой степени равна соответствующей степени мощности носителя:

$$|X^n| = |X|^n. \tag{80}$$

Пример. Как известно, допустимые значения произвольной булевой переменной определяет двухэлементное множество $X = \{0,1\}$.

Декартов квадрат этого множества есть множество, описывающее все возможные значения двух не зависимых друг от друга булевых переменных:

$$X^2 = X \times X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\};$$

$$|X^2| = |X|^2 = 2^2 = 4.$$

А декартов куб есть множество, описывающее все возможные значения трёх независимых друг от друга булевых переменных:

$$X^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\};$$

$$|X^3| = |X|^3 = 2^3 = 8.$$

2.2. Элементы теории отношений

Перейдём к изложению основ теории отношений [2, 3, 4].

Отношение – это произвольное подмножество R декартова произведения произвольных n множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то есть:

$$R \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n. \tag{81}$$

В свою очередь, из определения подмножества ясно, что определение отношения означает буквально следующее:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R \quad \Rightarrow \quad (x_1 \in X_1) \wedge (x_2 \in X_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in X_n). \tag{82}$$

Говорят, что отношение R задано на множествах $X_1, \ldots, X_n$, которые интерпретируют как универсальные для соответствующих аргументов.

Если $R = \varnothing$, то R – **пустое отношение**.

Если $R = X_1 \times \ldots \times X_n$, то R – **полное отношение**, которое, по аналогии с универсальным множеством, можно назвать **универсальным отношением**.

Пустое и полное отношение играют роли нуля и единицы в **множестве всех отношений**, возможных в декартовом произведении $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Причём это множество всех возможных отношений, очевидно, представляет собой булеан $2^{X_1 \times \ldots \times X_n}$.

Арность отношения R – это число n множеств-сомножителей декартова произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$, в котором задано отношение R.

Если $n = 1$, то R – **унарное** отношение.

Если $n = 2$, то R – **бинарное** отношение.

Если $n = 3$, то R – **тернарное** отношение.

В общем же случае, R – ***n*-арное** отношение.

Пример. Произвольное подмножество R заданного множества X можно интерпретировать как унарное отношение $R \subset X$.

Пример. Пусть X – множество мужчин, Y – множество женщин. Рассмотрим множество R, такое, что:

$$R \subset X \times Y;$$

$$((x, y) \in R) \Leftrightarrow (\text{мужчина } x \text{ знаком с женщиной } y).$$

Это множество R образует бинарное отношение, заданное на множествах X и Y, соответственно.

Более того, отношение R определяет связь, направленную от x к y, в связи с чем говорят, что отношение R есть действие, для обозначения которого общепринято использовать формальную функциональную запись: $X \xrightarrow{R} Y$.

Но, в отличие от классических функций, обязательно являющихся однозначными действиями, здесь результат действия R на элемент $x \in X$, обозначаемый как R_x, вообще говоря, есть множество всех тех женщин, с которыми знаком данный мужчина x.

Пример. Пусть A – множество всех мужчин, B – множество всех женщин, C – множество всех людей. Определим на этих множествах тернарное отношение R следующим образом:

$$R \subset A \times B \times C;$$
$$((\mathrm{x}, y) \in R) \Leftrightarrow (x, y - \textit{родители } Z).$$

В нашем курсе нас больше будут интересовать бинарные отношения, поскольку именно этот тип отношений является наиболее распространённым в прикладных системных исследованиях.

Бинарное отношение, заданное на множествах X и Y, есть множество R, которое является подмножеством множества $X \times Y$, то есть имеет место теоретико-множественное включение:

$$R \subset X \times Y. \tag{83}$$

В системном анализе бинарное отношение R интерпретируют как **действие**, определяющее **множество связей**, направленных из множества X в множество Y, в связи с чем высказывание $R \subset X \times Y$ записывают формально следующим образом:

$$X \xrightarrow{R} Y \tag{84}$$

Кроме того, высказывание $(\mathrm{x}, y) \in R$ для некоторой пары $(\mathrm{x}, y) \in X \times Y$ принято записывать кратко:

$$(xRy). \tag{85}$$

Если высказывание xRy истинно, то говорят, что элемент $x \in X$ состоит в отношении R с элементом $y \in Y$ или, что то же самое, элемент x связан с элементом y отношением R, причём связь R направлена от x к y.

Отрицание же данного высказывания обозначается $x\overline{R}y$ и означает отсутствие соответствующей направленной связи R, то есть наличие дополняющей связи $\overline{R} = (X \times Y) \setminus R$.

Таким образом, любое **бинарное отношение** R рассматривается далее как **действие**, устанавливающее **направленную связь** между элементами множества X и соответствующими им элементами множества Y.

Область отправления отношения R есть множество X.

Область прибытия отношения R есть множество Y.

Образ элемента $x \in y$ при действии R есть множество Rx, такое, что:

$$Rx \subset Y; \tag{86}$$

$$(y \in Rx) \Leftrightarrow (xRy). \tag{87}$$

Прообраз элемента $y \in Y$ есть множество $R^{-1}y$, такое, что:

$$R^{-1}y \subset X; \tag{88}$$

$$(x \in R^{-1}y) \Leftrightarrow (xRy). \tag{89}$$

Область определения отношения R есть подмножество $\mathfrak{D}_R$ области отправления X, определяемое следующим образом:

$$\mathfrak{D}_R \subset X; \tag{90}$$

$$(x \in \mathfrak{D}_R) \Leftrightarrow (Rx \neq \varnothing). \tag{91}$$

Образ (область значений) отношения R есть множество $\mathcal{I}m_R$ области прибытия Y, причём $\mathcal{I}m_R$ есть объединение образов всех элементов из $\mathfrak{D}_R$:

$$\mathcal{I}m_R \subset Y; \tag{92}$$

$$\mathcal{I}m_R = \bigcup_{x \in X} Rx. \tag{93}$$

Поэтому, по аналогии с образом элемента, образ отношения R можно рассматривать как образ всей области отправления и обозначать также как RX или $R\mathfrak{D}_R$, соответственно.

Если область отправления X и область прибытия Y бинарного отношения R представляют собой одно и то же множество V, то есть имеет место равенство множеств $X = V$ и $Y = V$, то говорят, что отношение R задано (действует) на множестве V.

Тождественное отношение I на множестве V есть отношение равенства:

$$V \xrightarrow{I} V; \tag{94}$$

$$(xIy) \Leftrightarrow (x = y). \tag{95}$$

Таким образом, тождественное отношение есть отношение равенства, которое связывает каждый элемент с самим собой и не связывает между собой различные элементы.

Рассмотрим **способы задания бинарных отношений**. Поскольку любое отношение (не только бинарное) является множеством, то ясно, что отношение можно задать любым из способов, применяемых для задания множеств [2].

Пример. Пусть X – множество всех мужчин, Y – множество всех женщин, а бинарное отношение R задано через характеристическое свойство, то есть характеристический предикат:

$$X \xrightarrow{R} Y;$$

$$(xRy) \Leftrightarrow (x - \textit{муж } y).$$

Ясно, что $\mathfrak{D}_R$ – множество всех женатых мужчин, а $\mathcal{I}m_R$ – множество всех замужних женщин, соответственно.

Этот пример показывает, что, как правило, $\mathfrak{D}_R \neq X$ и $\mathcal{I}m_R \neq Y$.

Координатный способ позволяет представить отношение в плоской системе декартовых координат, оси которой соответствуют области отправления и области прибытия рассматриваемого бинарного отношения.

Однако элементы этих множеств далеко не всегда имеют числовую природу, в связи с чем в некоторых случаях координаты являются условными.

Пример. Тождественное отношение I можно рассматривать как прямую, заданную уравнением $y = x$ в координатной плоскости.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$, а отношение R задано явно:

$$R = \{(1, x), (2, y), (3, y)\}.$$

На рис. 17 это бинарное отношение представлено координатным способом.

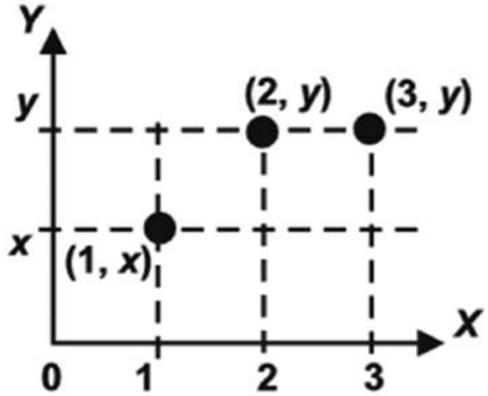


Рис. 17. Пример координатного представления бинарного отношения

Пример. Пусть отношение R действует в множестве действительных чисел (R) следующим образом:

$$\mathbb{R}\xrightarrow{R}\mathbb{R};$$

$$(xRy) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 = 1).$$

На рис. 18 это бинарное отношение представлено координатным способом.

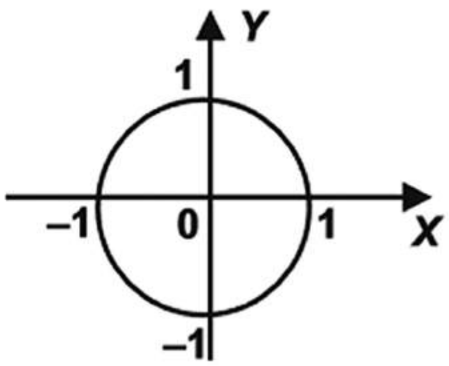


Рис. 18. Пример координатного представления бинарного отношения

Стрелочные диаграммы (двухдольные ориентированные графы) используются для представления бинарных отношений, действующих на конечных множествах [3, 4].

Пусть $X \xrightarrow{R} Y$. Элементы конечных множеств X и Y изображают в виде отдельных точек плоскости, причём множества X и Y изображают отдельными областями на плоскости, а связь xRy изображают стрелкой, направленной от элемента $x \in X$ к элементу $y \in Y$.

Пример. Пусть на множествах $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ действует бинарное отношение, заданное следующим образом:

$$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}.$$

Этому бинарному отношению соответствует стрелочная диаграмма, представленная на рис. 19.

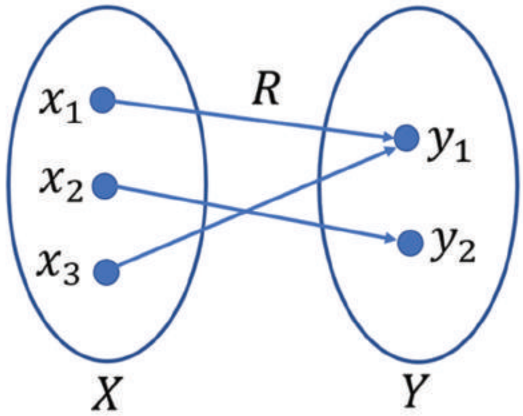


Рис. 19. Пример стрелочной диаграммы бинарного отношения

Матричное представление *I* бинарного отношения $X \xrightarrow{R} Y$ на конечных множествах X и Y реализуется следующим образом.

Предварительно необходимо произвольным, удобным для исследователя способом упорядочить элементы множеств X и Y, соответственно.

Матрица отношения R представляет собой таблицу M_R, строки которой нумеруются элементами множества X, а столбцы – элементами множества Y. То есть матрица имеет размеры $|X| \times |Y|$.

Далее, на пересечении строки, соответствующей элементу $x \in X$, и столбца, соответствующего элементу $y \in Y$, в зависимости от истинности либо ложности высказывания xRy, ставится логический элемент «1» либо «0», соответственно.

Пример. Пусть на множествах $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ задано бинарное отношение:

$$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}.$$

Тогда матрица отношения R имеет следующий вид:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица пустого отношения, очевидно, состоит лишь из нулей, а матрица полного отношения – из единиц.

В частности, в рассматриваемом здесь примере множеств X и Y эти матрицы имеют следующий вид:

$$M_{\varnothing} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_{X\times Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица тождественного отношения *I*, действующего на множестве V, очевидно, есть **единичная матрица** соответствующего порядка (равного мощности множества V), то есть квадратная матрица, вся главная диагональ которой состоит из единиц, а все внедиагональные элементы равны нулю.

Пример. Пусть множество V имеет мощность 3, то есть состоит из трёх элементов. Тогда матрица тождественного отношения I, действующего на этом множестве, имеет следующий вид:

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ориентированный граф бинарного отношения $V \xrightarrow{R} V$, действующего на конечном множестве V, представляет множество точек плоскости (вершин графа), соответствующих элементам множества V, в котором связь xRy изображается ребром, направленным из вершины $x \in V$ в вершину $y \in V$.

Связи вида соответствует **петля**, висящая на вершине $x \in V$.

Пример. Пусть на множестве $V = \{a, b, c\}$ действует бинарное отношение:

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, c)\}.$$

Этому бинарному отношению соответствует ориентированный граф, представленный на рис. 20. Данный граф имеет три вершины и три ориентированных рёбра, причём одно из них – петля.

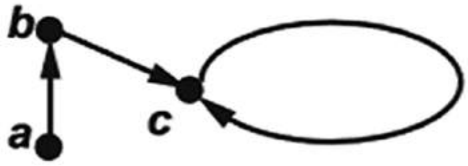


Рис. 20. Пример ориентированного графа бинарного отношения

Рассмотрим **операции над отношениями.** Будучи подмножеством декартова произведения, любое n-арное отношение прежде всего является множеством. Поэтому на отношения произвольной арности, очевидно, распространяются **все теоретико-множественные операции**.

В частности, в случае бинарных отношений, действующих на одних и тех же множествах X и Y, **объединению** отношений соответствует **поэлементная дизъюнкция** их матриц, а **пересечению** – **поэлементная конъюнкция**, соответственно.

Дополнению же бинарного отношения до полного соответствует матрица дополняющего отношения $\overline{R}$, полученная путём поэлементного логического отрицания матрицы исходного отношения, так как:

$$\overline{R} = \left(X \times Y\right) \setminus R; \tag{96}$$

$$R \cup \overline{R} = X \times Y; \quad R \cap \overline{R} = \varnothing. \tag{97}$$

Пример. Дополнением к тождественному отношению «равно» является отношение «не равно».

Пример. Пусть бинарные отношения R и S действуют на одних и тех же универсальных множествах X и Y и заданы следующими матрицами:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$M_{R \cup S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_{R \cap S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\overline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{\overline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако помимо теоретико-множественных операций существуют и **специальные операции над бинарными отношениями – обращение (инверсия) и композиция (суперпозиция)**.

Обращение бинарного отношения определяется следующим образом.

Если задано отношение $X \xrightarrow{R} Y$, то обратное отношение R^{-1} имеет вид:

$$Y \xrightarrow{R^{-1}} X; \tag{98}$$

$$\left(yR^{-1}x\right) \Leftrightarrow \left(xRy\right). \tag{99}$$

Из определения ясно, что $\mathfrak{D}_{R^{-1}} = \mathcal{I}m_R$ и $\mathcal{I}m_{R^{-1}} = \mathfrak{D}_R$.

Матрица обратного отношения R^{-1} есть **транспонированная матрица** исходного отношения:

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T. \tag{100}$$

Пример. Пусть

$$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}.$$

Тогда

$$R^{-1} = \{(y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_1, x_3)\}.$$

Матричное же представление этих отношений, очевидно, имеет вид:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим отношение «меньше» («<») на множестве $\mathbb{R}$. Тогда, очевидно, имеем:

$$(y <^{-1} x) \Leftrightarrow (x < y) \Leftrightarrow (y > x).$$

Таким образом, обратное отношение есть отношение «больше», то есть:

$$(<)^{-1} = (>).$$

Пример. Аналогично формально определяется обратное теоретико-множественное включение:

$$(\subset)^{-1} = (\supset).$$

Композиция (суперпозиция) бинарных отношений $X \xrightarrow{R} Y$ и $Y \xrightarrow{S} Z$ есть сложное бинарное отношение:

$$X \xrightarrow{R \circ S} Z; \tag{101}$$

$$\big(x(R \circ S)z\big) \Leftrightarrow \big(\exists y \in Y : (xRy) \wedge (ySz)\big). \tag{102}$$

Суперпозиция есть операторное произведение $R \circ S$ отношений как действий.

Разумеется, операторное произведение $R \circ S$ не следует путать с декартовым произведением $R \times S$ отношений как множеств.

Примечание. Для записи композиции функций (действий, операторов) f и g общепринятым является обратный порядок записи:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{103}$$

В этой формуле первым действует второй сомножитель f, а затем – первый сомножитель g, что иллюстрируется на рис. 21.

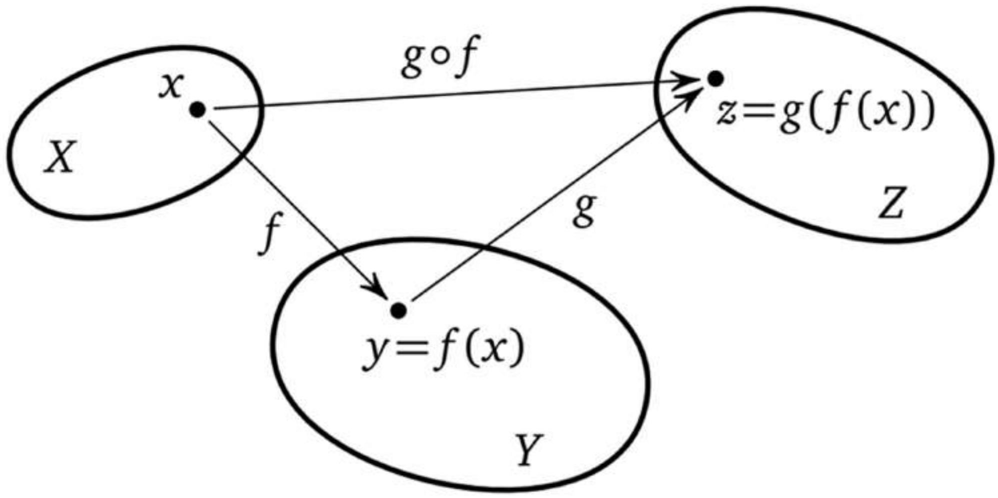


Рис. 21. Иллюстрация определения композиции функций

Для записи же композиции бинарных отношений применяется как прямой, так и обратный порядок записи.

В нашем курсе для записи композиции бинарных отношений мы используем прямой порядок записи как более удобный для прикладных системных исследований.

В системных задачах для расчёта композиции отношений можно использовать как стрелочные диаграммы, так и матричный способ – **логическое (булево) произведение матриц** рассматриваемых отношений:

$$M_{R \circ S} = M_R M_S. \tag{104}$$

Логическое произведение матриц вычисляется аналогично известному из курса высшей математики классическому **алгебраическому** произведению матриц, но вместо арифметических операций сложения и умножения используются дизъюнкция и конъюнкция, соответственно.

Пример. Рассмотрим два бинарных отношения:

$$R = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2)\};$$

$$S = \{(y_1, z_1), (y_3, z_1), (y_3, z_2)\}.$$

Тогда композиция этих бинарных отношений может быть вычислена, например, с помощью логического произведения их матриц:

$$M_{R\circ S} = M_R M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$R \circ S = \{(x_2, z_1), (x_2, z_2)\}.$$

Этот же результат можно получить и с помощью стрелочной диаграммы (рис. 22).

Здесь мы имеем дело с трёхдольным ориентированным графом. Очевидно, что композиция бинарных отношений определяет всевозможные пути длины 2 в данном ориентированном графе.

Отметим, что обычное алгебраическое произведение соответствующих матриц позволяет подсчитать количество соответствующих возможных путей из вершин множества X в вершины множества Y представленного ориентированного графа.

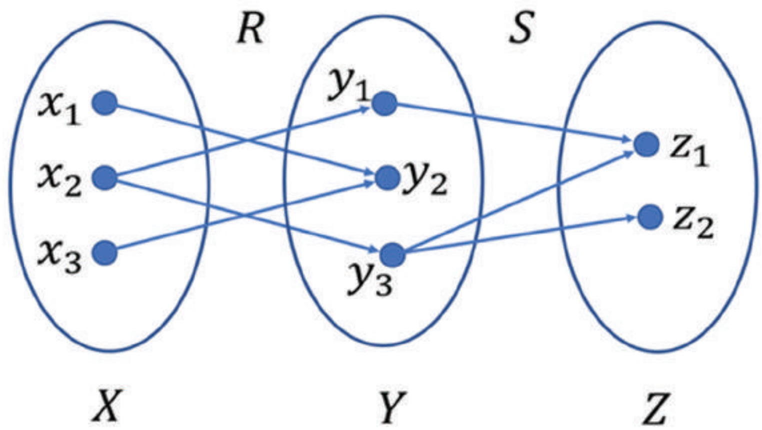


Рис. 22. Пример стрелочной диаграммы для вычисления композиции бинарных отношений

Если для рассматриваемых бинарных отношений определена их композиция, то имеют место следующие свойства:

- **ассоциативность композиции:**

$$R \circ (S \circ Q) = (R \circ S) \circ Q, \tag{105}$$

• формула обращения композиции:

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}. \tag{106}$$

Рассмотрим **свойства бинарных отношений**, действующих на одном и том же множестве V, то есть здесь $X = V$ и $Y = V$.

Во избежание возможных недоразумений отметим, что бинарное отношение $V \xrightarrow{R} V$ может обладать или не обладать некоторыми из рассматриваемых ниже свойств: рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью и транзитивностью.

Отношение R **рефлексивно**, если каждый элемент $x \in V$ состоит сам с собой в отношении R, то есть связан сам с собой отношением R:

$$(x \in V) \Rightarrow (xRx). \tag{107}$$

Примеры. Следующие отношения рефлексивны:

• тождественное отношение I;

• полное отношение $R = V^2 = V \times V$;

• нестрогие неравенства «$\leq$» и «$\geq$», рассматриваемые, например, на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Критерий рефлексивности:

$$\left(R - \text{рефлексивно}\right) \Leftrightarrow \left(I \subset R\right). \tag{108}$$

Матрица рефлексивного отношения характеризуется тем, что вся её главная диагональ состоит из единиц. **Граф рефлексивного отношения** характеризуется тем, что на каждой его вершине висит петля.

Если бинарное отношение $V \xrightarrow{R} V$ не является рефлексивным, то его можно расширить до рефлексивного. **Рефлексивное замыкание** отношения R есть наименьшее в смысле теоретико-множественного включения его рефлексивного расширения:

$$R_{\text{рефлекс}} = I \cup R. \tag{109}$$

Отношение R **антирефлексивно**, если ни один из элементов множества не состоит сам с собой в отношении R (не связан сам с собой этим отношением), то есть:

$$\left(x \in V\right) \Rightarrow \left(x\overline{R}x\right). \qquad (110)$$

Примеры. Следующие отношения антирефлексивны:
- пустое отношение $\varnothing$;
- отношение «не равно», рассматриваемое на любом множестве V;
- строгие неравенства «<» и «>» на множестве $\mathbb{R}$.

Критерий антирефлексивности:

$$(R - \textit{антирефлексивно}) \Leftrightarrow (I \cap R = \varnothing). \qquad (111)$$

Матрица антирефлексивного отношения характеризуется тем, что вся её главная диагональ состоит из нулей. **Граф антирефлексивного отношения** характеризуется тем, что в нём отсутствуют петли.

Следует обратить внимание на следующее:

антирефлексивность $\Rightarrow$ отсутствие рефлексивности.

Но обратное утверждение, в общем случае, неверно, то есть отсутствие рефлексивности, вообще говоря, ещё не означает антирефлексивность.

Пример. Отношение R, заданное матрицей

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Отношение R **симметрично**, если имеет место симметрия связей, то есть по сути двунаправленность связей, которая считается эквивалентной исчезновению их направленности:

$$\left(xRy\right) \Leftrightarrow \left(yRx\right). \qquad (112)$$

Примеры. Следующие отношения симметричны:
- пустое отношение $\varnothing$;
- полное отношение $R = V^2 = V \times V$;
- тождественное отношение I;
- отношение «не равно».

Критерий симметричности:

$$\left(R - симметричное\right) \Leftrightarrow \left(R = R^{-1}\right). \tag{113}$$

Матрица симметричного отношения симметрична, то есть:

$$M_R = (M_R)^T. \tag{114}$$

Граф симметричного отношения утрачивает ориентированность и становится неориентированным, так как двунаправленная связь считается эквивалентной ненаправленной.

Симметричное замыкание отношения R есть наименьшее в смысле теоретико-множественного включения его симметричного расширения:

$$R_{sym} = R \cup R^{-1}. \tag{115}$$

Отношение R **антисимметрично**, если элемент $x \in V$ может состоять в двунаправленной связи R, разве что лишь сам с собой:

$$\left(\left(xRy\right) \wedge \left(yRx\right)\right) \Rightarrow \left(x = y\right). \tag{116}$$

Критерий антисимметричности:

$$(R - антисимметрично) \Leftrightarrow (R \cap R^{-1} \subset I). \tag{117}$$

Примеры. Следующие отношения антисимметричны:

- пустое отношение $\varnothing$;
- тождественное отношение I;
- все неравенства «≤», «≥», «<», «>» на множестве $\mathbb{R}$.

Примечание. Свойства симметричности и антисимметричности не исключают друг друга. Например, пустое и тождественное отношения симметричны и антисимметричны одновременно.

Отношение R **транзитивно**, если имеет место транзитивность действующих связей, то есть:

$$\left(\left(xRy\right) \wedge \left(yRz\right)\right) \Rightarrow \left(xRz\right). \tag{118}$$

Критерий транзитивности:

$$\left(R - \mathit{транзитивное}\right) \Leftrightarrow \left(R \circ R \subset R\right). \tag{119}$$

Примеры. Следующие отношения транзитивны:
- пустое отношение $\varnothing$;
- полное отношение $R = V^2 = V \times V$;
- тождественное отношение I;
- все неравенства «≤», «≥», «<», «>» на множестве $\mathbb{R}$.

Транзитивное замыкание отношения R есть наименьшее в смысле теоретико-множественного включения его транзитивного расширения R_{tr}.

Пример. Пусть V – это множество людей (и живых, и мёртвых), на котором отношение R действует следующим образом:

$$\left(xRy\right) \Leftrightarrow \left(x - \mathit{это\ родитель}\ y\right).$$

Тогда транзитивное замыкание отношения R есть отношение R_{tr}:

$$\left(xR_{tr}y\right) \Leftrightarrow \left(x - \mathit{это\ предок}\ y\right).$$

Пример. Если V – это множество аэропортов, на котором отношение R действует следующим образом:

$$\left(xRy\right) \Leftrightarrow \left(\mathit{существует\ прямой\ рейс\ из}\ x\ \mathit{в}\ y\right).$$

Тогда транзитивное замыкание отношения R есть отношение R_{tr}:

$$\left(xR_{tr}y\right) \Leftrightarrow \left(\mathit{можно\ долететь\ из}\ x\ \mathit{в}\ y,\ \mathit{возможно\ с\ пересадками}\right).$$

Можно доказать следующую **формулу транзитивного замыкания**:

$$R_{tr} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots, \tag{120}$$

где композиционная степень $R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n\ \text{раз}}$.

Если бинарное отношение R действует на **конечном** множестве V, то вычислительный процесс стабилизируется за конечное число шагов, и формула транзитивного замыкания в этом случае примет следующий вид:

$$(|V| = N) \Rightarrow (R_{tr} = \bigcup_{n=1}^{N} R^n = R \cup \ldots \cup R^N). \qquad (121)$$

Пример. Пусть на множестве $V = \{a, b\}$ задано отношение:

$$R = \{(a, b), (b, a)\}.$$

Матрица этого отношения, очевидно, имеет следующий вид:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Композиционный квадрат отношения R соответствует матрице:

$$M_{R^2} = (M_R)^2 = M_R M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединение отношений R и R^2 соответствует матрице:

$$M_{R_{tr}} = M_R \vee M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомое транзитивное замыкание есть отношение

$$R_{tr} = R \cup R^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Примечание. Отметим, что матрица отношения R^2 определяет все возможные связи, соответствующие путям длины 2 в графе исходного отношения R.

2.3. Эквивалентность и порядок

Равенство объектов означает их неразличимость. Отношение эквивалентности или кратко — эквивалентность обобщает понятие равенства. Эквивалентные объекты условно не различимы.

В системном анализе и прикладных системных исследованиях используются различные отношения эквивалентности.

Так, ещё Людвиг фон Берталанфи отметил, что нередко одна и та же математическая модель может описывать системы, совершенно разные по своей природе, например, механические и электрические колебания. Это наблюдение легло в основу метода аналогий и стало важнейшим фактором, обусловившим развитие системного анализа.

Известны также случаи, когда совершенно разные по форме и структуре математические модели описывают одну и ту же систему. Поэтому в системном анализе важную роль играют отношения эквивалентности в соответствующих пространствах систем и их моделей.

Отношение эквивалентности – это бинарное отношение $V \xrightarrow{\sim} V$, которое одновременно является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть для любых элементов $x, y, z \in V$ *справедливо следующее*:

$$(x \sim x); \tag{122}$$

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x); \tag{123}$$

$$((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z). \tag{124}$$

Высказывание $(x \sim y)$ читается следующим образом: «элемент x эквивалентен элементу y» или так: «элементы x и y эквивалентны».

В силу симметричности отношения эквивалентности ясно, что обратное отношение совпадает с исходным:

$$(\sim)^{-1} = (\sim). \tag{125}$$

Класс эквивалентности, порождаемый элементом $v \in V$ – это множество $[v]$ всех элементов, эквивалентных данному элементу, то есть:

$$[v] \subset V; \tag{126}$$

$$(x \in [v]) \Leftrightarrow (x \sim v). \tag{127}$$

В силу рефлексивности отношения эквивалентности ясно, что $v \in [v]$, а значит класс эквивалентности – непустое множество.

Можно доказать, что любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются, а объединение всех классов эквивалентности есть множество V.

Таким образом, отношение эквивалентности реализует **факторизацию**, то есть разбиение множества V на непустые, попарно не пересекающиеся классы эквивалентности, в каждый из которых попадают лишь эквивалентные друг другу внутри данного класса элементы множества V.

Фактор-множество – это множество $V\,/_{\sim}$ всех классов эквивалентности.

Факторизация множества по действующему на нем отношению эквивалентности является одним из способов реализации системного принципа декомпозиции.

Пример. Пусть V – множество мужчин, на котором рассматривается следующее бинарное отношение:

$$\left(x \sim y\right) \Leftrightarrow \left(x - \textit{брат}\ y\right).$$

Это отношение очевидно является симметричным.

Но рефлексивным и транзитивным оно будет лишь в том случае, если мы договоримся считать, что каждый мужчина является братом самому себе.

При такой договорённости это отношение станет отношением эквивалентности, действующим на множестве V.

Отношение эквивалентности реализует разбиение множества V на непустые, попарно не пересекающиеся классы эквивалентности, каждый из которых включает в себя лишь братьев внутри этого класса.

Пример. Пусть на множестве $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано бинарное отношение в виде ориентированного графа (рис. 23).

При нумерации вершин, соответствующей этому графу, матрица рассматриваемого отношения имеет блочно-диагональную структуру:

$$M_{\sim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

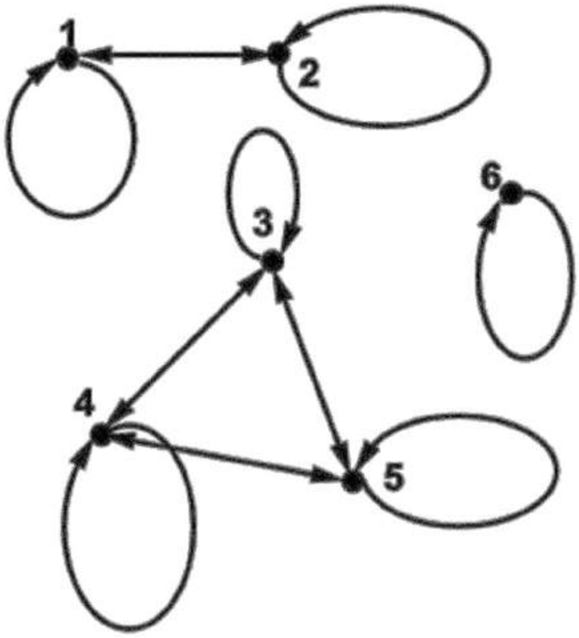


Рис. 23. Пример графа отношения эквивалентности

Нетрудно убедиться в том, что рассматриваемое здесь отношение является одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Таким образом, это отношение является эквивалентностью и разбивает множество V на три класса эквивалентности, то есть фактор-множество имеет вид:

$$V/_{\sim} = \{\{1,\ 2\},\{3,\ 4,\ 5\},\{6\}\}.$$

С точки зрения методологии системного анализа рассмотренные примеры факторизации множества относительно действующего на нём отношения эквивалентности наглядно демонстрируют широкие возможности использования фактор-множеств в качестве одного из инструментов реализации принципа декомпозиции.

В системных исследованиях нередко внутри каждого класса эквивалентности выбирается один единственный представитель (элемент) внутри этого класса, и весь класс, и все его представители отождествляются далее с выбранным представителем.

Пример. Важный пример в идентификации систем связан с так называемой эквивалентностью представления (реализации) математических моделей многомерных линейных стационарных динамических систем в пространстве состояний, когда класс эквивалентности объединяет все модели с одинаковой канонической жордановой реализацией.

Кроме того, отношение эквивалентности реализуется, например, на **диаграммах Вороного**, прикладная важность которых для МЧС России иллюстрируется следующим примером.

Пример. Пусть в различных местах некоторой территории дислоцированы части спасательных воинских формирований, представленные красными точками на рис. 24.

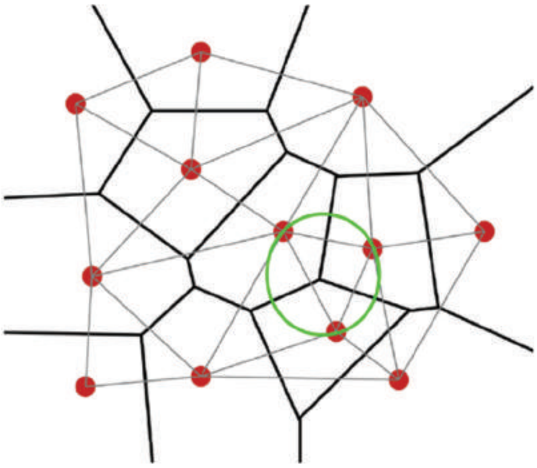


Рис. 24. Пример зонирования территории на основе диаграммы Вороного

Тогда оптимальное с точки зрения минимизации времени прибытия спасательных подразделений в место возможной чрезвычайной ситуации зонирование территории определяется границами областей, выделенными чёрными линиями на соответствующей диаграмме Вороного.

В основе построения диаграммы Вороного для заданного множества выделенных (красных) точек лежит следующий принцип оптимальности: внутри каждой выпуклой многоугольной области должны находиться точки, ближайшие именно к красной точке этой области, а не к красной точке какой бы то ни было другой области.

Аналогичные диаграммы возникают также в сложных системных задачах, связанных с моделированием и прогнозированием распространения эпидемий, в которых красные точки соответствуют действующим очагам заражения.

Перейдём теперь к рассмотрению **отношений порядка**.

Дело в том, что отношения типа неравенств, действующие на множестве действительных чисел, позволяют сравнивать между собой числа. Но как сравнивать между собой объекты нечисловой природы, например, альтернативы в задачах принятия решений?

Отношения порядка обобщают понятие неравенства и позволяют сравнивать объекты нечисловой природы, в частности — системы, между собой.

Порядок, как и неравенство, может быть нестрогим или строгим. Единственное отличие от числовых неравенств состоит в том, что не всегда любые два объекта одного и того же множества сравнимы между собой.

Нестрогий порядок – это бинарное отношение $V \xrightarrow{\preccurlyeq} V$, которое одновременно является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, то есть для любых элементов $x, y, z \in V$:

$$(x \preccurlyeq x); \tag{128}$$

$$\big((x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq x)\big) \Rightarrow (x = y); \tag{129}$$

$$\big((x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z)\big) \Rightarrow (x \preccurlyeq z). \tag{130}$$

Высказывание $(x \preccurlyeq y)$ читается следующим образом: «элемент x нестрого предшествует элемент y» или так: «элемент x предшествует либо равен элементу y».

Из определения обратного отношения имеем:

$$(y \preccurlyeq^{-1} x) \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y)) \Leftrightarrow (y \succcurlyeq x). \tag{131}$$

Поэтому обратный порядок связан с исходным следующим равенством:

$$(\preccurlyeq)^{-1} = (\succcurlyeq). \tag{132}$$

Высказывание $(y \succcurlyeq x)$ читается следующим образом: «элемент y нестрого следует за элементом x» или так: «элемент y следует, либо равен элементу x».

Пример. Тождественное отношение I определяет нестрогий порядок.

Пример. Отношение «≤» задаёт нестрогий порядок на множестве $\mathbb{R}$, а отношение «≥» задаёт обратный нестрогий порядок на множестве $\mathbb{R}$.

Пример. Отношение логического следствия $\Rightarrow$, рассматриваемое на любом заданном множестве высказываний, предварительно профакторизованном по отношению к логической эквивалентности $\Leftrightarrow$, представляет собой нестрогий порядок.

Пример. Аналогично, отношение теоретико-множественного включения, рассматриваемое на любом заданном множестве множеств, представляет собой нестрогий порядок.

Пример. Пусть V – множество мужчин. Рассмотрим отношение:

$$V \overset{\preccurlyeq}{\rightarrow} V;$$

$$(x \preceq y) \Leftrightarrow (x - предок\ y).$$

Если принять соглашение о том, что каждый человек является предком по отношению к самому себе, то это отношение определяет нестрогий порядок на множестве V.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – это пара $\langle V, \preccurlyeq \rangle$.

Элементы $x, y \in V$ называют **сравнимыми** между собой в смысле заданного порядка $\preccurlyeq$; если их можно сравнить, то есть истинно высказывание:

$$(x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x). \tag{133}$$

Если порядок $\preccurlyeq$ позволяет сравнивать между собой любые два элемента множества, то ЧУМ превращается в ЛУМ – **линейно упорядоченное множество**. ЛУМ также называют **цепью**.

Пример. Множество действительных чисел, упорядоченных по возрастанию $\langle \mathbb{R}, \ \leq \rangle$, образует ЛУМ.

Пример. В любом словаре конечное множество слов некоторого языка упорядочено **линейно** с помощью **лексикографического порядка**.

Пример. Пусть на множестве точек плоскости $\mathbb{R}^2$, заданных своими декартовыми прямоугольными координатами, определён следующий нестрогий порядок:

$$\mathbb{R}^2 \overset{\preccurlyeq}{\rightarrow} \mathbb{R}^2;$$

$$(A \preccurlyeq B) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A \leq x_B \\ y_A \leq y_B \end{cases}.$$

Здесь фигурная скобка обозначает конъюнкцию высказываний.

Рассмотрим две точки со следующими декартовыми координатами:

$$A = \binom{2}{5}; \qquad B = \binom{3}{4}.$$

Очевидно, эти две точки не сравнимы между собой в смысле заданного отношения порядка, то есть:

$$(A \not\preccurlyeq B) \wedge (B \not\preccurlyeq A).$$

Поскольку существуют несравнимые элементы, рассматриваемый нестрогий порядок является частичным, но не является линейным.

Строгий порядок – это бинарное отношение $V \overset{\prec}{\to} V$, которое одновременно является антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным, то есть для любых элементов $x, y, z \in V$:

$$(x \not\prec x); \tag{134}$$

$$((x \prec y) \wedge (y \prec x)) \Rightarrow (x = y); \tag{135}$$

$$((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \Rightarrow (x \prec z). \tag{136}$$

Можно доказать, что антисимметричность бинарного отношения следует из антирефлексивности и транзитивности. Поэтому в определении строгого порядка можно исключить требование антисимметричности.

Примеры. Строгие неравенства «строго меньше» и «строго больше», рассматриваемые на множестве $\mathbb{R}$, а также применяемый в словарях лексикографический порядок, рассматриваемый на множестве слов того или иного языка, являются примерами отношений строгого порядка.

Пример. Отношение части и целого.

Взаимосвязь строгого и соответствующего ему нестрогого порядка определяется следующими соображениями.

Строгий порядок нетрудно трансформировать в соответствующий ему нестрогий:

$$(x \preccurlyeq y) \Leftrightarrow ((x \prec y) \vee (x = y)). \tag{137}$$

Аналогично, нестрогий порядок трансформируется в соответствующий ему строгий:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow \big((x \preccurlyeq y) \wedge (x \neq y)\big). \tag{138}$$

Отношения иерархического подчинения, возникающие между подсистемами и элементами в сложных системах разной природы, демонстрируют важность отношений порядка в системном анализе.

В частности, отношение теоретико-системного включения, рассматриваемое на множестве выделенных подсистем исследуемой системы, можно интерпретировать как отношение порядка.

Наконец, известный математик Шарковский, специальным образом упорядочив натуральные числа, сформулировал и доказал теорему о периодичности итераций одномерных непрерывных отображений, имеющую важное теоретическое и прикладное значение в исследовании динамики нелинейных систем.

Однако изложение соответствующих системных идей выходит за рамки нашего курса в силу их повышенной математической сложности.

2.4. Бинарное отношение как действие

Рассмотрим произвольное бинарное отношение:

$$X \xrightarrow{R} Y. \tag{139}$$

Отношение R **сюръективно**, если $RX = Y$, то есть:

$$\mathcal{I}m_R = Y. \tag{140}$$

Отношение R **функционально**, если результат его действия на аргумент (0–97) определён **однозначно**, то есть:

$$\big((xRy_A) \wedge (xRy_B)\big) \Rightarrow (y_A = y_B). \tag{141}$$

Ясно, что для таких отношений

$$(xRy) \Leftrightarrow (y = Rx). \tag{142}$$

Поэтому любое **функциональное отношение** R часто называют **функцией** либо **действием**, либо **оператором.**

Отсутствие связи R некоторого элемента $x \in X$ с каким-либо элементом $y \in Y$ означает, что действие R не определено на этом элементе x, то есть:

$$Rx = \varnothing. \tag{143}$$

Действие R есть **отображение**, если оно определено на всей области отправления, то есть:

$$\mathfrak{D}_R = X; \tag{144}$$

$$\left(x \in X\right) \Rightarrow \left(Rx \neq \varnothing\right). \tag{145}$$

Отношение R **инъективно**, если R^{-1} функционально, то есть:

$$\left(\left(x_A R y\right) \wedge \left(x_B R y\right)\right) \Rightarrow \left(x_A = x_B\right). \tag{146}$$

Инъекция – это инъективное функциональное отображение.

Сюръекция – это сюръективное функциональное отображение.

Биекция – это взаимно однозначное отображение, то есть отображение, которое одновременно является **инъекцией** и **сюръекцией**.

Пример. Рассмотрим числовое отображение:

$$Rx = x^2.$$

В табл. 12 представлены результаты анализа свойств такого отображения в зависимости от рассматриваемой области отправления и области прибытия.

Таким образом, как показывает этот пример, все эти свойства существенно зависят от области отправления и области прибытия, на которых проводится анализ действующего отношения.

Аналогично может быть рассмотрен пример, в котором отношение связывает, например, каждый субъект Российской Федерации с соответствующим ему множеством опасностей и угроз чрезвычайных ситуаций.

Таблица 12

Пример анализа свойств отображения

№ пп	Область отправления	Область прибытия	Свойства исследуемого отображения
1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	R не является ни инъекцией ($R(1)=R(-1)$), ни сюръекцией ($Rx\geq 0$)
2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$^+	R не является инъекцией, но является сюръекцией
3	$\mathbb{R}$^+	$\mathbb{R}$	R является инъекцией, но не является сюръекцией
4	$\mathbb{R}$^+	$\mathbb{R}$^+	R – биекция

2.5. Каузальные отношения как инструмент многофакторного имитационного моделирования системной динамики

В многофакторном системном анализе и имитационном моделировании системной динамики актуальными являются **каузальные отношения**[1], связывающие выделенные исследователем факторы между собой по причинно-следственному принципу, в соответствии с которым причина, оказывающая непосредственное влияние на следствие, соединяется с ней соответствующей направленной связью:

$$x \to y.$$

Ориентированный граф, представляющий каузальное отношение, называется **причинно-следственной диаграммой**. Этот граф является меченым, поскольку каждая каузальная связь имеет **полярность**, которая может быть **положительной** либо **отрицательной**. Соответствующий знак связи определяется следующими соображениями [5].

Если усиление/ослабление причины вызывает усиление/ослабление следствия, соответственно, то эта каузальная связь положительна:

$$x \xrightarrow{+} y.$$

[1] Термин предложен автором.

Если же усиление/ослабление причины вызывает ослабление/усиление следствия, соответственно, то эта каузальная связь отрицательна:

$$x \xrightarrow{-} y.$$

Простейшие примеры построения каузальных диаграмм представлены на рис. 1 и рис. 2, соответственно.

Оба примера являются достаточно простыми по двум причинам.

Во-первых, соответствующие диаграммы содержат малое число факторов, влияющих на исследуемую проблему, в то время как в реальных сложных системных задачах количество факторов и связей, соответственно, возрастает.

Во-вторых, ни одна из представленных диаграмм не содержит замкнутых контуров обратной связи, которые неизбежно возникают в сложных ситуациях.

Пример. На рис. 25 представлена каузальная диаграмма, иллюстрирующая зависимость потребительского спроса на товар [5].

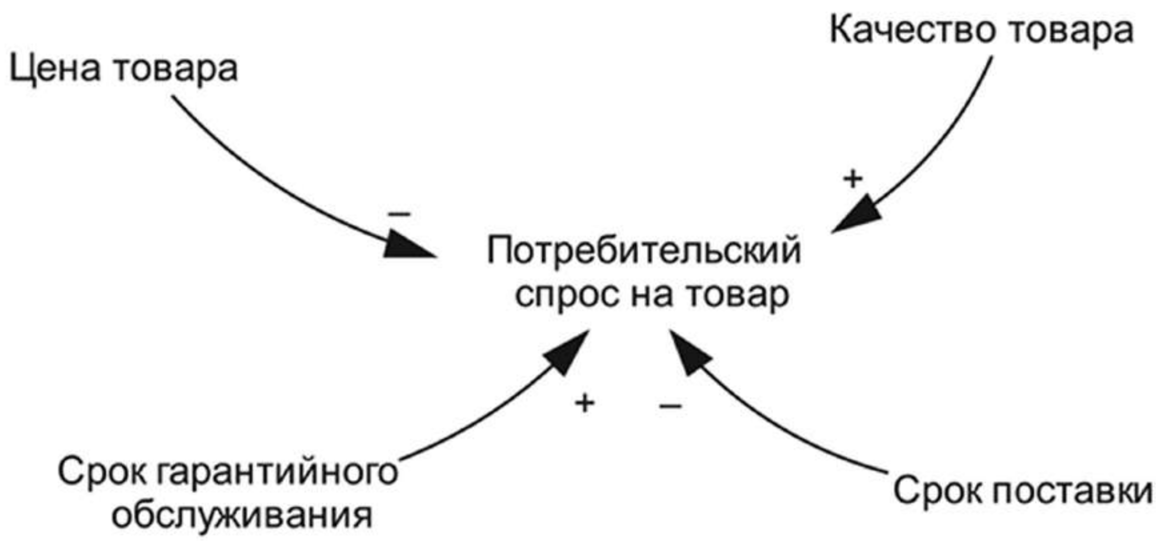


Рис. 25. Каузальная диаграмма, иллюстрирующая зависимость потребительского спроса на товар

Пример. На рис. 26 представлена каузальная диаграмма, иллюстрирующая факторы, влияющие на качество жизни в городе [5].

Рис. 26. Каузальная диаграмма, иллюстрирующая факторы, влияющие на качество жизни в городе

В более сложных ситуациях в соответствующих графах возникают **замкнутые контуры обратной связи**. В каждом из таких контуров факторы связаны друг с другом последовательно, причём направление всех каузальных связей, действующих между факторами в таком контуре, всегда одинаково.

Характер системной динамики в непрерывном времени зависит от полярности каждого замкнутого контура обратной связи, которая определяется произведением полярностей всех связей, образующих исследуемый замкнутый контур. Ясно, что количество положительных связей в таком произведении никак не влияет на знак полярности контура.

Таким образом, полярность обратной связи зависит лишь от чётности или нечётности отрицательных связей, образующих замкнутый контур: **положительная обратная связь** возникает при **чётном числе минусов** в контуре, тогда как **отрицательная обратная связь** имеет место при **нечётном** их числе, соответственно.

Согласно классическому определению положительный контур обратной связи часто определяется так, что начальное изменение любой переменной в контуре в конечном счете стимулирует далее самоизменение в первоначальном направлении. То есть замкнутый контур положительной обратной связи является самовоспроизводящимся, усиливает рост, дестабилизирует систему, ускоряя и отдаляя её от установившегося режима.

Соответствующий пример представлен на рис. 27.

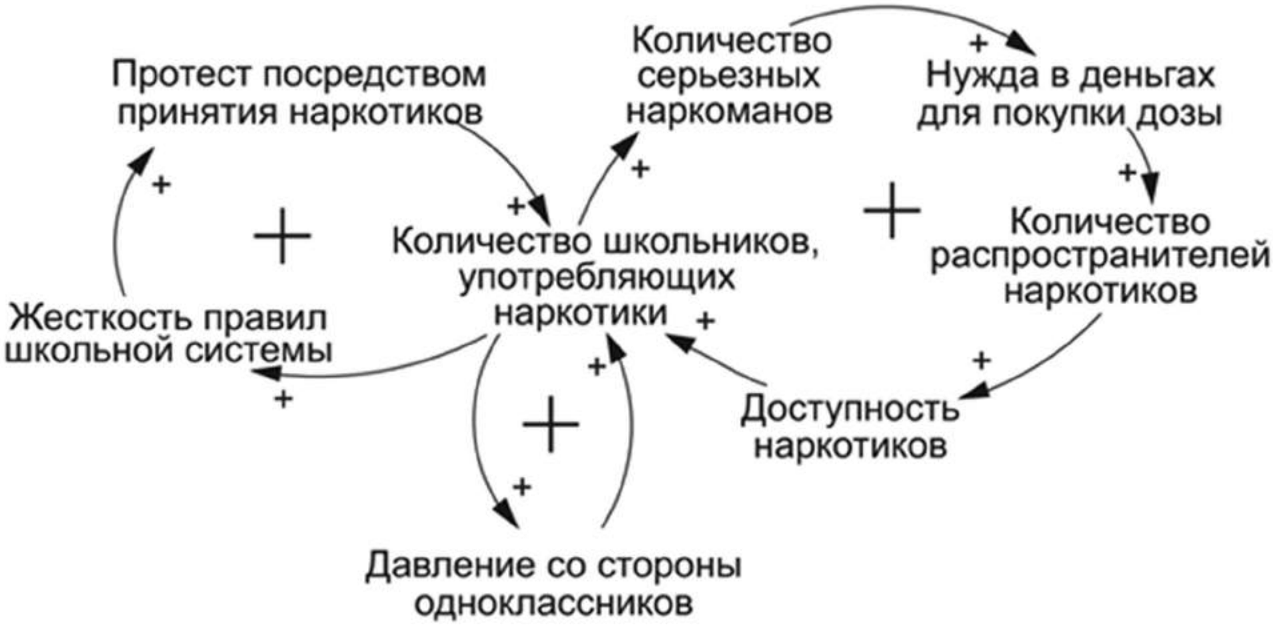


Рис. 27. Механизм распространения наркотиков в школах

Отрицательный же контур обратной связи называют также балансирующим, так как такая обратная связь противодействует неконтролируемому росту, обусловливает целенаправленное поведение системы, стабилизируя её и возвращая к установившемуся режиму.

Поэтому, как известно в теории управления (кибернетике), именно отрицательные обратные связи позволяют реализовывать цели управления.

Ричардсон и Пью отмечают, что системно-динамическая модель или системно-динамические диаграммы создаются с целью получить ответ на один или несколько правильно поставленных вопросов. От того как будет поставлен вопрос, во многом зависит, какой ответ будет получен [6].

Пример. Рассмотрим проблему безопасности на дорогах.

Ясно, что с усовершенствованием систем безопасности автомобиля растет личная безопасность водителя, которая снижает количество жертв ДТП: водитель погибает при авариях гораздо реже (рис. 28).

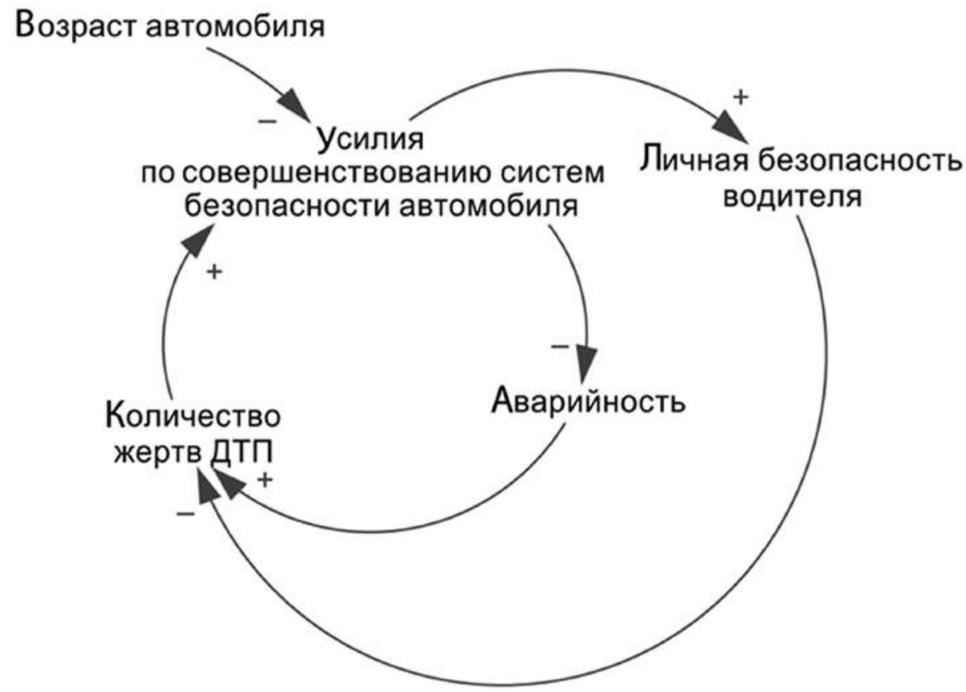


Рис. 28. Каузальная диаграмма, отражающая влияние систем безопасности автомобиля на количество ДПТ

Вместе с тем более безопасный автомобиль провоцирует водителя на более рискованную езду, то есть имеет место сознательная или бессознательная компенсация риска (рис. 29).

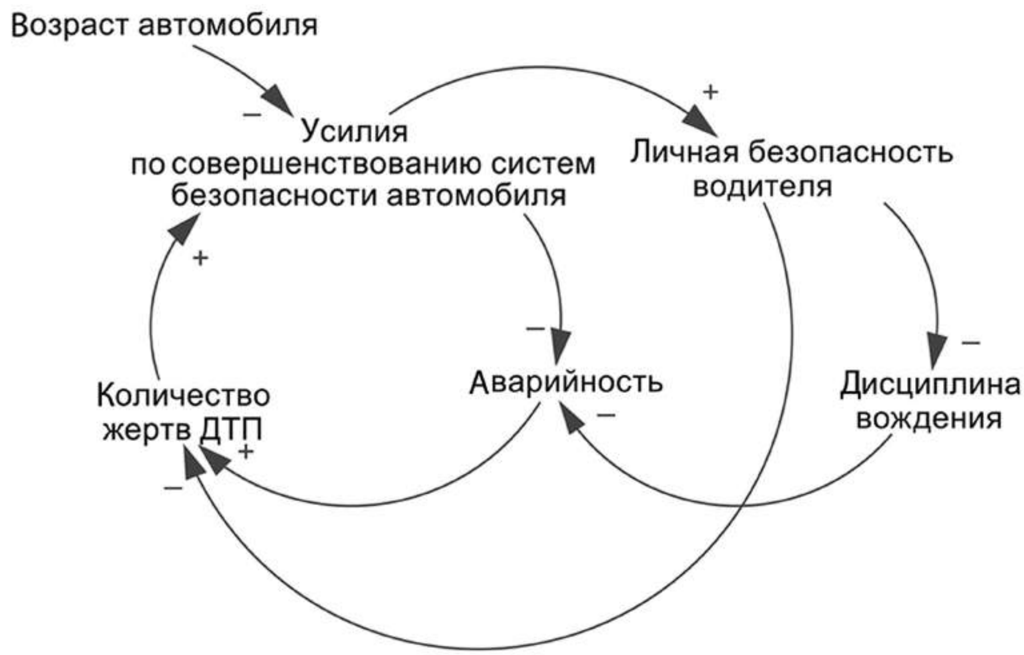


Рис. 29. Каузальная диаграмма, иллюстрирующая явление компенсации риска

Сформулированный в психологии закон компенсации риска с точки зрения системной динамики представляет собой классический пример контринтуитивного поведения систем, сформулированный впервые еще Джеем Форрестером и широко известный специалистам по системному моделированию [7].

Единственный способ эффективно бороться с высокой смертностью – это изменить привычки водителей.

Соответствующая итоговая каузальная диаграмма системного анализа проблемы безопасности на дорогах, учитывающая эффективность превентивных мер, представлена на рис. 30.

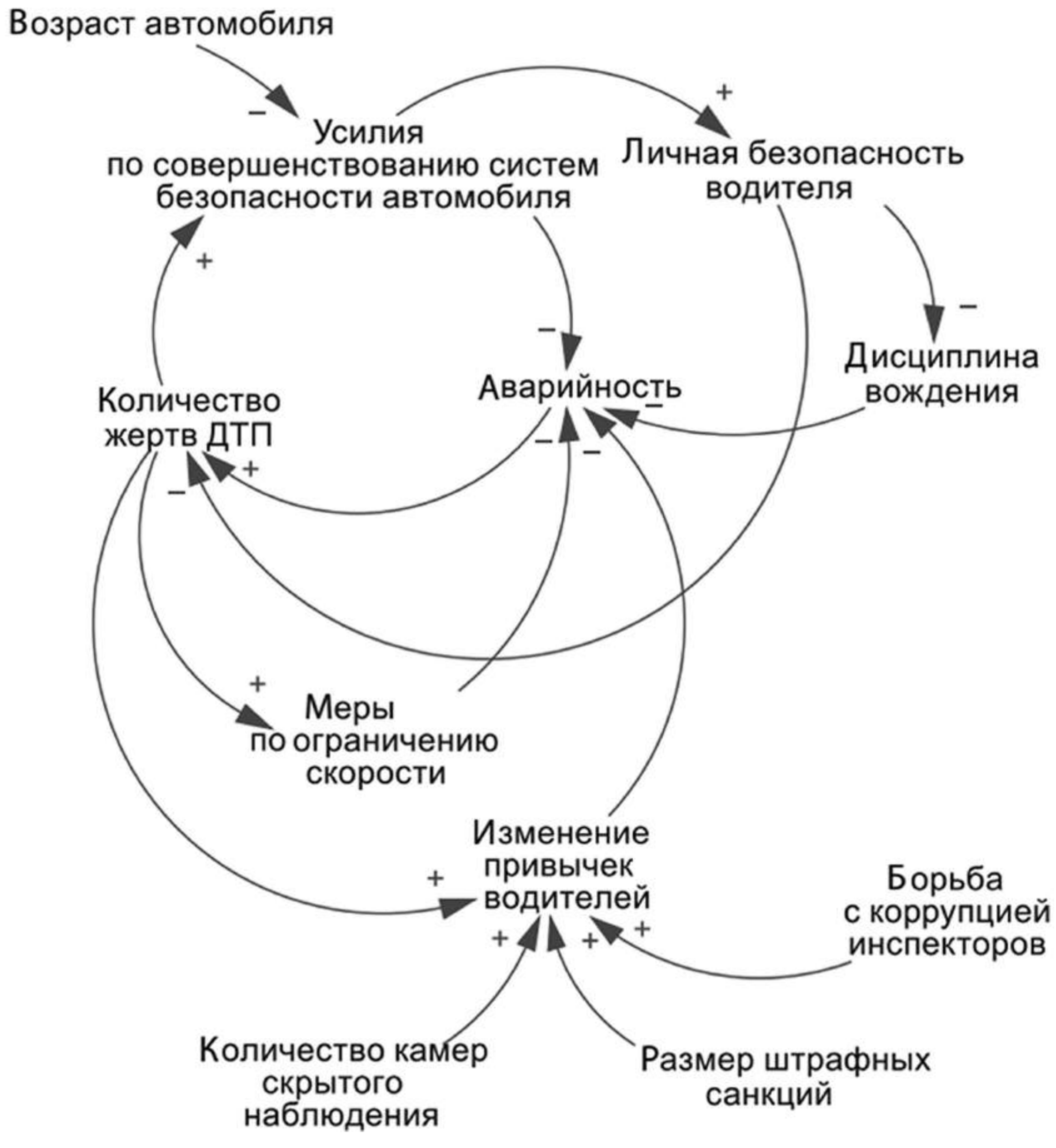


Рис. 30. Итоговая каузальная диаграмма системного анализа проблемы безопасности на дорогах

Таким образом, можно видеть, что применение системно-динамического анализа позволило выявить суть причин аварийности на дорогах – дисциплину вождения водителей.

Соответственно, полученные результаты достаточно парадоксальны: например, как видно из диаграмм, традиционное решение – увеличение безопасности водителя путем совершенствования систем автомобильной безопасности, несмотря на видимый эффект в краткосрочном плане, не способно решить долгосрочную проблему. Это происходит потому, что согласно системной динамике в результате подобной управленческой интервенции не решается основная проблема – безопасное управление автомобилем со стороны водителя.

Рассмотренный пример наглядно показывает высокую интеллектуальную отдачу от применения качественного системно-динамического анализа к проблемам управления.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение декартова произведения конечного числа множеств. Коммутативно ли декартово произведение? Ассоциативно ли декартово произведение? Чему равна мощность декартова произведения?
2. Что такое отношение? Приведите примеры унарных, бинарных и тернарных отношений.
3. Чем отличается область отправления от области определения бинарного отношения? Чем отличается область прибытия от области значений бинарного отношения?
4. Перечислите основные способы задания бинарных отношений. Какое отношение принято называть тождественным?
5. Как строятся матрицы объединения, пересечения и дополнения для бинарных отношений, действующих на одних и тех же множествах?
6. Сформулируйте определение и опишите процедуру построения матрицы и графа обратного отношения. Сформулируйте определение и опишите процедуру построения матрицы и графа композиции отношений. Какая формула связывает обращение и композицию отношений?
7. Какими специальными свойствами могут обладать бинарные отношения, действующие на одном и том же множестве? Как построить транзитивное замыкание отношения?

8. Какими свойствами должно обладать отношение эквивалентности? Сформулируйте определение и основные свойства классов эквивалентности. Что такое фактор-множество? Приведите примеры.

9. Какими свойствами должно обладать отношение порядка. Чем строгий порядок отличается от нестрогого? Чем линейный порядок отличается от нелинейного? Что такое лексикографический порядок?

10. Опишите основные принципы построения каузальных диаграмм и определения полярности замкнутых контуров обратной связи.

Литература

1. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / В. М. Зюзьков. Томск: Эль Контент, 2015. 236 с.
2. Дискретная математика: Учеб.-метод. пособ. / Авт.-сост. В. А. Феофанова, В. И. Воротников / М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВПО «УрФУ им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина»; Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2013. 256 с.
3. Графы в задачах анализа и синтеза структур сложных систем / В. А. Овчинников. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. 423 с.
4. *Рогов А. Ю.* Графовые методы анализа в дискретной математике: учебное пособие / А. Ю. Рогов, В. И. Халимон, О. В. Проститенко. СПб: СПбГТИ(ТУ), 2012. 88 с.
5. *Каталевский Д. Ю.* Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении: Учеб. пособ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 496 с.
6. *Richardson G., Pugh A.* Introduction to System Dynamics Modeling with DYNAMO. MIT Press, 1981.
7. *Forrester J. W.* Counterintuitive behavior of social systems // Technology Review. 1971. 73 (3).

3. Нечёткие множества как инструмент формализации неопределённости

3.1. Нечёткость как фактор неопределённости

Традиционно основным фактором неопределённости и, соответственно, недетерминированности, то есть непредсказуемости поведения сложных систем разной природы, считается случайность, формализуемая чаще методами теории вероятностей и математической статистики как стохастическая неопределённость либо реже методами гарантированного множественного оценивания как ограниченная неопределённость.

Вместе с тем системные аналитики выделяют и ряд других факторов неопределённости, одним из которых является нечёткость.

В отличие от случайности нечёткость не обладает свойством статистической воспроизводимости и не подчиняется известному в теории вероятностей закону больших чисел, а значит **не является вероятностью**.

Схема, представленная на рис. 31, отражает два основных аспекта неопределённости, возникающей в задачах системного анализа сложных проблемных ситуаций разной природы.

Обобщением теории вероятностей и теории нечётких множеств является так называемая **теория возможностей**, изложение которой, в силу повышенного уровня математической сложности, выходит за рамки нашего курса [1, 2].

Мы ограничимся рассмотрением лишь наиболее важных в методологическом плане основ теории нечётких множеств, знание которых крайне необходимо, как минимум, для формализации неопределённостей, неизбежно возникающих в сложных прикладных системных задачах.

Рис. 31. Основные факторы системной неопределённости

3.2. Основы теории нечётких множеств

Ранее мы рассматривали классические **множества**, которые далее будем называть **чёткими множествами**.

Пусть далее U – универсальное множество.

Каждое чёткое множество $A \subset U$ описывается своей **характеристической функцией** μ_A, называемой также его **индикатором**:

$$U \xrightarrow{\mu_A} \{0,1\}; \tag{147}$$

$$\mu_A(x) = |(x \in A)| = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}. \tag{148}$$

Пример. Пусть в качестве универсального множества рассматривается множество действительных чисел $\mathbb{R}$, в котором задано чёткое подмножество $A = [a, b]$. График характеристической функции этого множества представлен на рис. 32.

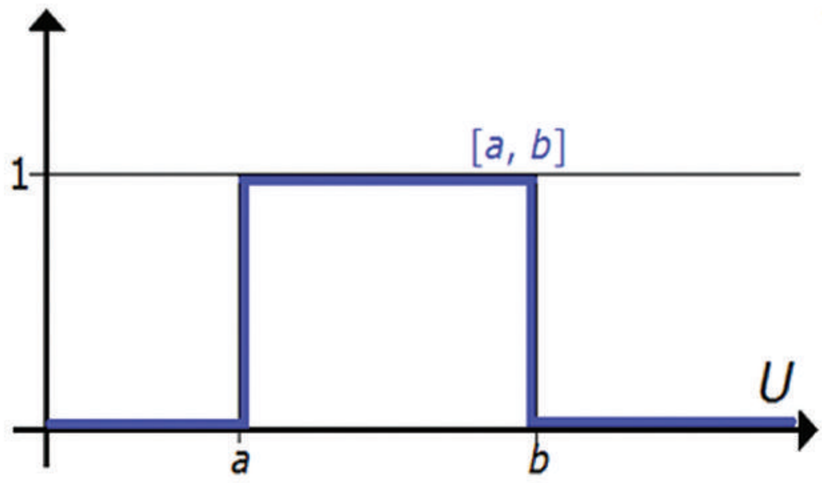


Рис. 32. Пример характеристической функции чёткого множества

В 1965 году профессор Лотфи Заде, основатель нечёткой логики, обобщил понятие характеристической функции [1, 2], позволив ей принимать произвольные числовые значения из отрезка [0,1].

Так родилось понятие «**функция принадлежности**» нечёткого множества A.

$$U \overset{\mu_A}{\rightarrow} [0,1]. \tag{149}$$

Для каждого конкретного элемента $x \in U$ число $\mu_A(x)$ интерпретируется как **мера (степень) принадлежности** элемента нечёткому множеству $A \subset U$.

Элементы универсального множества, характеризующиеся нулевым или единичным значением функции принадлежности, очевидно, интерпретируются как самые чёткие.

Чем ближе степень принадлежности некоторого элемента к нулю («**чёткая непринадлежность**») или единице («**чёткая принадлежность**»), тем **более чётким** является этот элемент.

Таким образом, **нечёткое множество** есть кортеж вида:

$$\langle U, \mu_A \rangle. \tag{150}$$

Такое представление вполне подходит для любого чёткого множества, и в этом смысле является универсальным.

Также нечёткое множество A интерпретируют как чёткое множество упорядоченных пар вида $(x, \mu_A(x))$, всю совокупность которых представляют в следующем условном формате записи:

$$A = \sum \frac{\mu_A(x)}{x}. \tag{151}$$

Здесь дробь не является делением, а лишь обозначает пару $(x, \mu_A(x))$, а символ «Σ» не является суммированием, а лишь обозначает совокупность, то есть чёткое множество таких пар [3].

В прикладных вычислительных целях нечёткое множество A обычно отождествляют с его функцией принадлежности μ_A.

Если универсальное множество U конечно, то его можно упорядочить, пронумеровав его элементы произвольным удобным способом:

$$U = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}. \tag{152}$$

В соответствии с такой нумерацией элементов универсального множества мы можем представить нечёткое множество, то есть его функцию принадлежности μ_A в виде **ковектора**, то есть вектора-строки соответствующих значений функции принадлежности:

$$\mu_A = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_N)). \tag{153}$$

Более того, в случае надобности функцию принадлежности представляют в виде вектора, то есть столбца значений функции принадлежности:

$$\mu_A = \begin{pmatrix} \mu_A(x_1) \\ \mu_A(x_2) \\ \vdots \\ \mu_A(x_N) \end{pmatrix}. \tag{154}$$

Потребность в таком столбцовом представлении μ_A обусловлена чисто алгебраическими причинами и возникает в связи с необходимостью умножения некоторой матрицы M на вектор μ_A.

Любое чёткое множество, очевидно, является частным случаем нечёткого, а нечёткая логика обобщает классическую чёткую логику.

В частности, **пустое множество** $\varnothing$ имеет тождественно нулевую функцию принадлежности, а **универсальное множество** U – тождественно единичную функцию, соответственно, то есть:

$$\forall x \in U;$$

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \mu_U(x) = 1. \tag{155}$$

Множество всех нечётких множеств над заданным универсальным множеством U бесконечно (даже в случае конечного U) и, очевидно, равномощно множеству всех возможных функций принадлежности, то есть отображений μ_A, действующих из множества U в континуум [0,1], то есть:

$$P(U) = [0,1]^U. \tag{156}$$

Поскольку числовой отрезок [0,1] не является счётным и имеет мощность континуума, то есть эквивалентен по мощности множеству всех действительных чисел $\mathbb{R}$, то нечётких множеств гораздо больше, чем чётких:

$$[0,1]^U >> \{0,1\}^U. \tag{157}$$

Пример. Рассмотрим понятие «**пожилой**».

Если попытаться формализовать это понятие в терминах чётких множеств, то получим весьма грубое описание, представленное на рис. 33.

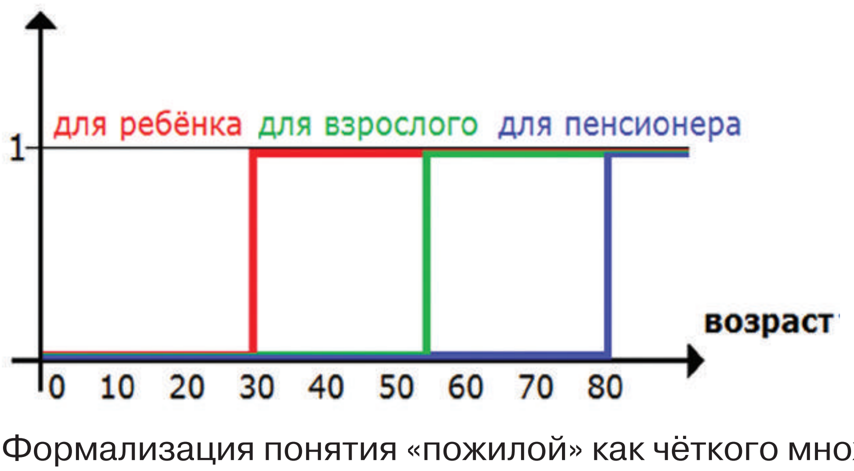


Рис. 33. Формализация понятия «пожилой» как чёткого множества

Нечёткое множество позволяет сделать переходы между классами «ребёнок», «взрослый», «пенсионер» более плавными и, соответственно, формализовать понятие «пожилой» более адекватно реальности (рис. 34).

Рис. 34. Формализация понятия «пожилой» как нечёткого множества

В приведённом примере мы сталкиваемся с неопределённостью понятия «пожилой». Однако эта неопределённость обусловлена не случайностью, а размытостью лексического значения слова «пожилой», то есть неопределённость в этом примере является лингвистической.

Нечёткость возникает во многих понятиях естественного разговорного языка.

Например, такие понятия как: «успешный», «красивый», «близкий к нулю», «приблизительно равно», «на много больше», «на много меньше», «опасность» и так далее, очевидно, являются размытыми, нечёткими, то есть лингвистически не определёнными.

Если представлять нечёткие множества, соответствующие этим понятиям, кругами Эйлера, то границы этих кругов окажутся размытыми.

Наглядным физическим примером нечёткого множества может служить временной срез процесса диффузии, в частности – фотография капли чернил, растекающейся в стакане воды.

Как показывают приведенные выше примеры, математическая формализация многих размытых, нечётких понятий в виде нечётких множеств выглядит гораздо более убедительно по сравнению с чёткими множествами. Вместе с тем при использовании нечётких множеств актуальной становится **проблема корректности (адекватности) задания функций принадлежности**.

Для определения значений функции принадлежности (степеней принадлежности) при построении нечёткого множества используются следующие подходы:

1. Прямые (экспертные) методы. В этих методах решение о степенях принадлежности принимает эксперт, который тем самым выражает свое субъективное мнение, сформированное на основе имеющихся у него знаний, опыта и интуиции. Поэтому эти методы во многом являются субъективными.

2. Косвенные методы. В этих методах степени принадлежности определяются на основе измерений свойств элементов.

Использование различных методов приводит к установлению вполне обоснованных числовых значений степеней принадлежности.

Рассмотрим **основные характеристики нечётких множеств**.

1. Носитель (суппорт) нечёткого множества A есть **чёткое** множество $suppA$ элементов из U, для которых функция принадлежности μ_A не равна нулю, то есть положительна:

$$suppA \subset U; \tag{158}$$

$$\left(x \in suppA\right) \Leftrightarrow \left(\mu_A\left(x\right) > 0\right). \tag{159}$$

Нечёткое множество называют **одноточечным**, если его носитель состоит из одного единственного элемента.

2. Диаграмма Заде нечёткого множества A представляет собой фигуру под ломаной линией, построенной на основе функции принадлежности μ_A.

3. Л**иния перегиба** диаграммы Заде соответствует значению функции принадлежности, равному **0,5**, и является **самым нечетким**. Чем ближе степень принадлежности некоторого элемента к линии перегиба, тем более нечётким является этот элемент. Соответствующая **точка перехода** – это **самый нечёткий** элемент $x^* \in U$, то есть для него:

$$\mu_A\,(x^*) = 0{,}5. \tag{160}$$

Пример. Пусть над универсальным множеством $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ задано нечёткое множество, диаграмма Заде которого приведена на рис. 35.

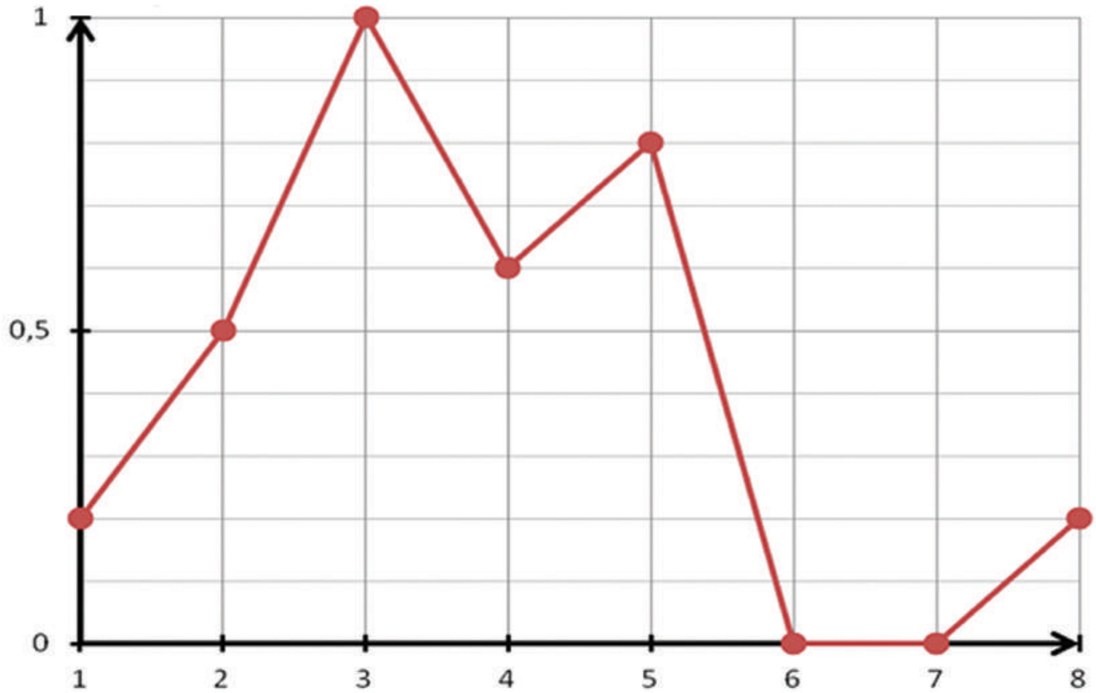


Рис. 35. Пример диаграммы Заде

Здесь наиболее чёткими элементами являются числа 3, 5, 4, а также 6, 7, 1, 8.

Самым нечётким является один единственный элемент – число 2.

4. Кардинальное число нечёткого множества с конечным носителем есть сумма степеней принадлежности элементов универсума U этому множеству:

$$|A| = \sum \mu_A(x). \tag{161}$$

Заметим, что кардинальное число служит аналогом понятия «мощность» конечного чёткого множества, представляющего собой количество элементов этого множества.

5. Ядро нечёткого множества есть **чёткое** множество *coreA* элементов универсального множества U, степени принадлежности которых равны единице, то есть:

$$coreA \subset U; \tag{162}$$

$$(x \in coreA) \Leftrightarrow (\mu_A(x) = 1). \tag{163}$$

Если ядро есть одноточечное множество, то нечёткое множество называют **унимодальным**.

6. Высота нечёткого множества есть число $sup\mu_A(x)$.

Для конечных множеств $sup\mu_A(x) = \max\mu_A(x)$.

Нечёткое множество A называют **нормальным**, если его высота равна единице.

В противном случае нечёткое множество называют **субнормальным**.

Непустое субнормальное нечёткое множество можно **нормализовать** следующим образом:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{sup\mu_A(x)}. \tag{164}$$

Рис. 36 иллюстрирует приведенные выше основные понятия.

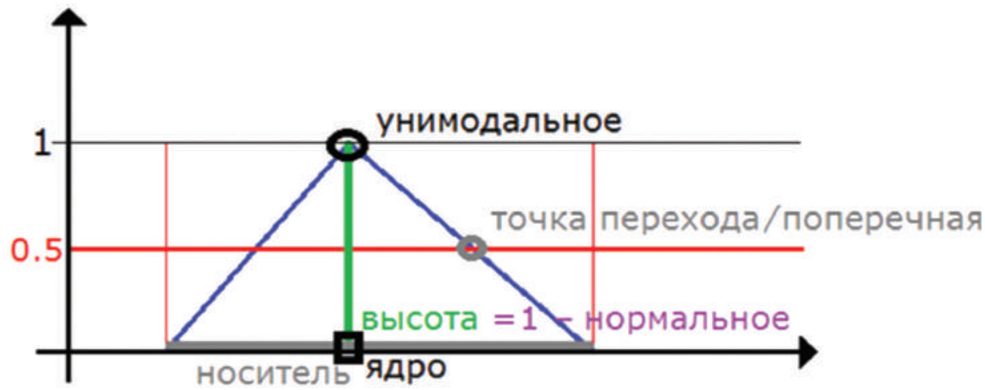


Рис. 36. Иллюстрация основных характеристик нечёткого множества

Пример. Пусть дано универсальное множество:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

на котором задано нечёткое множество A в виде ковектора значений функции принадлежности:

$$\mu_A = (0; 0; 0; 0,5; 0,8; 1; 1; 0,8; 0,5; 0; 0).$$

Диаграмма Заде этого нечёткого множества приведена на рис. 37.

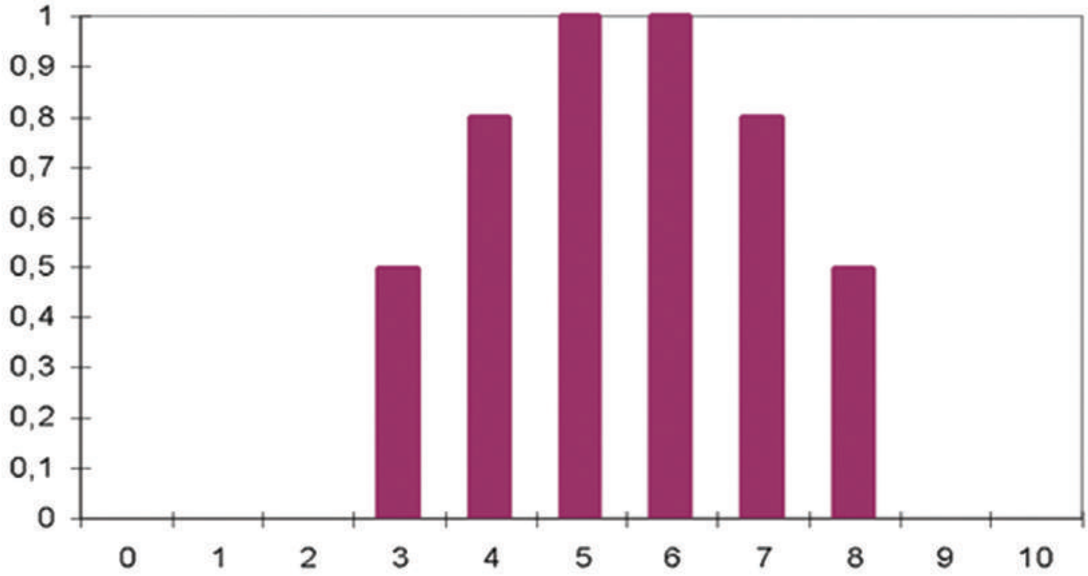


Рис. 37. Пример диаграммы Заде

Для рассматриваемого нечёткого множества A имеем:

$$suppA = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$coreA = \{5, 6\};$$

$$|A| = 4{,}6;$$

$$max\mu_A(x) = 1.$$

Множество точек перехода содержит два элемента $\{3,\ 8\}$.

Рассмотрим **теоретико-множественные отношения между нечёткими множествами:** равенство и включение.

Пусть A и B – нечёткие множества, заданные как подмножества одного и того же универсального множества U.

Тогда равенство и включение нечётких множеств определяются в терминах их функций принадлежности, соответственно, следующим образом:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in U \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)) \tag{165}$$

и

$$\left(A \subset B\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in U \quad \mu_A\left(x\right) \leq \mu_B\left(x\right)\right). \tag{166}$$

Эти определения указанных **бинарных теоретико-множественных отношений** полностью согласованы с соответствующими определениями для чётких множеств.

Теоретико-множественные операции над нечёткими множествами можно определить по-разному.

При этом нужно учитывать, что нечёткие множества охватывают и множества в обычном смысле, поэтому вводимые операции не должны противоречить определениям уже известных теоретико-множественным операций над чёткими множествами.

Классическое определение дополнения и **классические (максиминные) определения объединения** и **пересечения** нечётких множеств выглядят, соответственно, следующим образом:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x); \tag{167}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \tag{168}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \tag{169}$$

Пример пересечения нечётких множеств, соответствующих понятиям «человек средних лет» и «старый человек», представлен на рис. 38.

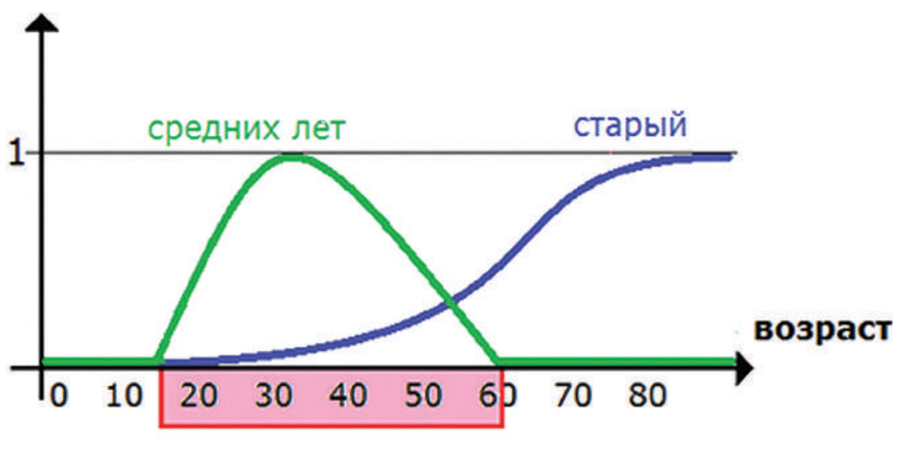


Рис. 38. Иллюстрация пересечения нечётких множеств

Альтернативные алгебраические определения операций пересечения и объединения называют алгебраическим произведением и алгебраической суммой нечётких множеств, соответственно; они выглядят следующим образом:

$$\mu_{A\cap B} = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x); \tag{170}$$

$$\mu_{A\cup B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\,. \tag{171}$$

Хотя все эти определения согласованы с определениями операций для чётких множеств, но для нечётких множеств сохраняются далеко не все свойства этих операций.

В частности, в отличие от чётких множеств для нечётких множеств имеем:

$$A \cup \overline{A} \neq U \quad \text{и} \quad A \cap \overline{A} \neq \varnothing. \tag{172}$$

Впрочем, это и не удивительно – ведь само понятие принадлежности элемента нечёткому множеству является размытым, нечётким, неопределённым и с этой точки зрения вполне естественно, что некоторые элементы могут одновременно как принадлежать нечёткому множеству A, так и не принадлежать ему (на соответствующей диаграмме Венна граница множества A расплывчата).

Операции концентрации и растяжения определяются следующим образом, соответственно:

$$\mu_{A^2}(x) = (\mu_A(x))^2; \tag{173}$$

$$\mu_{\sqrt{A}}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}. \tag{174}$$

Нечёткая импликация используется при построении нечёткого логического вывода:

$$A \to B = \overline{A} \cup B; \tag{175}$$

$$\mu_{A\to B} = \min\left\{1, 1-\mu_A(x)+\mu_B(x)\right\}. \tag{176}$$

Кроме того, в задачах нечёткого моделирования, проектирования баз знаний экспертных систем и систем искусственного интеллекта поддержки принятия решений применяется концепция полных ортогональных семантических пространств (ПОСП), которую мы не рассматриваем в силу повышенной математической сложности соответствующего материала.

В представлении нечётких множеств важную роль играет процедура **декомпозиции нечёткого множества** по чётким множествам – сечениям заданного уровня.

Сечение уровня α (для $0 < \alpha \le 1$) нечёткого множества A есть **чёткое** множество A_α:

$$A_\alpha \subset U; \tag{177}$$

$$(x \in A_\alpha) \Leftrightarrow (\mu_A(x) \ge \alpha). \tag{178}$$

Отметим следующее важное **свойство сечений**:

$$(\alpha \le \beta) \Rightarrow (A_\beta \subset A_\alpha). \tag{179}$$

Действительно, имеем:

$$(x \in A_\beta) \Rightarrow (\mu_A(x) \ge \beta \ge \alpha) \Rightarrow (\mu_A(x) \ge \alpha) \Rightarrow (x \in A_\alpha). \tag{180}$$

Теорема о декомпозиции нечёткого множества. Любое нечёткое множество A можно представить в форме объединения всевозможных сечений:

$$A = \bigcup_{0<\alpha\le 1} \alpha A_\alpha. \tag{181}$$

В этой формуле **объединение** понимается в смысле **максимизации**, а αA_α определяется как нечёткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x). \tag{182}$$

Пример. Рассмотрим универсальное множество

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\},$$

в котором нечёткое множество A задано в виде ковектора значений функции принадлежности:

$$\mu_A = (0{,}1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}5).$$

По определению сечения заданного уровня α имеем:

$$\mu_{A_{0,1}} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad \Rightarrow \quad \mu_{0,1A_{0,1}} = (0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1)$$

$$\mu_{A_{0,4}} = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad \Rightarrow \quad \mu_{0,4A_{0,4}} = (0 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4)$$

$$\mu_{A_{0,5}} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad \Rightarrow \quad \mu_{0,5A_{0,5}} = (0 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5)$$

$$\mu_{A_{0,6}} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0) \quad \Rightarrow \quad \mu_{0,6A_{0,6}} = (0 \quad 0 \quad 0{,}6 \quad 0{,}6 \quad 0{,}6 \quad 0)$$

$$\mu_{A_{0,9}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0) \quad \Rightarrow \quad \mu_{0,9A_{0,9}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}9 \quad 0{,}9 \quad 0)$$

$$\mu_{A_1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \quad \Rightarrow \quad \mu_{1A_1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

Таким образом, получаем декомпозицию:

$$A = 0{,}1A_{0,1} \cup 0{,}4A_{0,4} \cup 0{,}5A_{0,5} \cup 0{,}6A_{0,6} \cup 0{,}9A_{0,9} \cup 1A_1.$$

В прикладных системных исследованиях, связанных, например, с решением задач нечёткой классификации территорий городов, муниципальных образований или субъектов Российской Федерации по степени опасности источников возможных чрезвычайных ситуаций, нередко возникает необходимость в оценке расстояния между двумя заданными нечёткими множествами.

Расстояние между нечёткими множествами определяется как соответствующая метрика в пространстве функций принадлежности.

Расстояние Хэмминга определяется по формуле:

$$\rho(A,B) = \sum_{x \in U} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right|. \qquad (183)$$

Расстояние Евклида определяется по формуле:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2}. \tag{184}$$

Можно доказать, что обе эти формулы для определения расстояния удовлетворяют всем трём аксиомам метрического пространства: неотрицательность и невырожденность, симметричность и неравенство треугольника. Следовательно, их использование в качестве расстояния правомерно.

3.3. Понятие нечёткого отношения

Декартово произведение нечётких множеств A и B, рассматриваемых как нечёткие подмножества чётких универсальных множеств X и Y, соответственно, есть нечёткое множество [4]:

$$A \times B \subset X \times Y; \tag{185}$$

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}. \tag{186}$$

Нечёткое отношение есть произвольное нечёткое подмножество R декартова произведения соответствующих универсальных множеств [4]:

$$R \subset X_1 \times \ldots \times X_N; \tag{187}$$

$$\mu_R(x_1,\ldots,x_n)\le \min\{\mu_{X_1}(x_1),\ldots,\mu_{X_n}(x_n)\}. \tag{188}$$

В частности, нечёткое бинарное отношение R характеризуется функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая в системном анализе интерпретируется как **интенсивность связи** R, действующей в направлении от элемента $x \in X$ к элементу $y \in Y$.

Пример. Отношение «приблизительно равно», рассматриваемое, например, на множестве действительных чисел, является нечётким:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{R} \mathbb{R};$$

$$(xRy) \Leftrightarrow (x \approx y).$$

По сути это – размытое тождественное отношение. Геометрически такое отношение в декартовой прямоугольной системе координат представляет утолщённая полоса с размытыми границами, плотность которой возрастает по мере приближения к точкам, принадлежащим прямой $y = x$.

Пример. Отношение «на много меньше», рассматриваемое, например, на множестве действительных чисел, является нечётким:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{R} \mathbb{R};$$

$$(xRy) \Leftrightarrow (x \ll y).$$

Геометрически данному отношению в декартовой прямоугольной системе координат соответствует размытая область над прямой $y = x$, плотность которой повышается по мере удаления от этой прямой.

Матрица нечёткого отношения определяется аналогично матрице чёткого отношения, а элементами матрицы являются значения функции принадлежности $\mu_R(x, y) \in [0,1]$.

Меченый граф нечёткого отношения строится аналогично графу чёткого отношения, в котором рёбра, соответствующие направленным связям, метятся весами $\mu_R(x, y)$.

Поскольку нечёткие отношения являются нечёткими множествами, над ними определены все операции над нечёткими множествами, а также операция инверсии и композиция отношений.

Обращение (инверсия) нечёткого отношения реализуется, как и в случае чёткого отношения, путём **транспонирования** его матрицы.

Композиция (суперпозиция, произведение) нечётких отношений реализуется, как и в случае чётких отношений, путём произведения **их матриц**, причём произведение может рассматриваться в разных смыслах (контекстах).

Разумеется, результат вычисления композиции зависит от выбора того или иного произведения, практическая целесообразность которого во многом обусловлена целями исследования и контекстом задачи [4].

Чаще всего в задачах используется **максиминное произведение**.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 1 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

3.4. Принцип обобщения Заде

Принцип обобщения Заде носит эвристический характер и является основополагающим принципом в теории нечётких множеств, так как позволяет перенести различные математические операции с чётких множеств на нечёткие. В основе этого принципа лежит следующая идея [4].

Пусть X и Y – **чёткие** универсальные множества.

Результат действия чёткого оператора $X \xrightarrow{R} Y$ на нечёткое множество A определяется как нечёткое множество, обозначаемое далее RA, причём:

$$RA \subset Y; \tag{189}$$

$$\mu_{RA}(y) = \sup_{x \in R^{-1}y} \mu_A(x). \tag{190}$$

Научное обоснование практической целесообразности данного выше определения базируется на следующей цепочке эквивалентностей, известной из теории чётких отношений:

$$(y \in Rx) \Leftrightarrow (xRy) \Leftrightarrow (yR^{-1}x) \Leftrightarrow (x \in R^{-1}y). \tag{191}$$

В общем случае, чёткое множество $R^{-1}y$ может содержать более одного элемента, что иллюстрирует диаграмма на рис. 39.

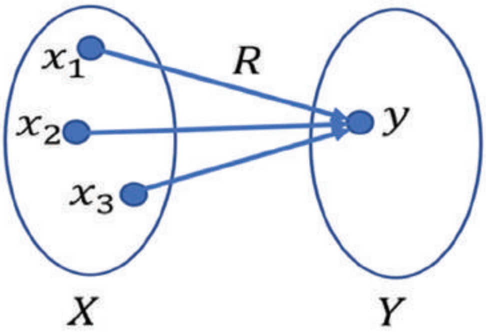


Рис. 39. Иллюстрация возможной неоднозначности прообраза элемента

Поэтому степень принадлежности элемента $y \in Y$ нечёткому множеству RA полагается равной максимальной степени принадлежности среди всех элементов исходного множества X, которые связываются оператором R с одним и тем же элементом $y \in Y$.

В частном же случае, если отображение, реализуемое оператором R, является биекцией, то есть действие R реализует взаимно однозначное соответствие между элементами множества X и элементами множества Y, то для каждого элемента $y \in Y$ прообраз элемента y, то есть чёткое множество $R^{-1}y$, содержит лишь один единственный элемент $x \in X$, в связи с чем данное выше определение в рассматриваемом частном случае трансформируется в следующее равенство:

$$\mu_{RA}(y) = \mu_A\left(R^{-1}y\right). \tag{192}$$

Громоздкие формулы и весь процесс вычисления можно существенно упростить, если обратить внимание на следующее обстоятельство[2].

Вначале заметим, что любое чёткое множество A можно интерпретировать как бинарное отношение, связывающее это множество с элементами, ему принадлежащими:

$$\{A\} \overset{\ni_A}{\to} X; \tag{193}$$

$$\left(A \ni_A x\right) \Leftrightarrow \left(A \ni x\right) \Leftrightarrow \left(x \in A\right). \tag{194}$$

Здесь X – универсальное множество.

[2] Предложено автором.

Далее, в целях упрощения записи будем отождествлять отношение $\ni_A$ с множеством A, то есть считаем, что:

$$\ni_A = A. \tag{195}$$

Этот подход особенно удобен в теории нечётких множеств, в рамках которой конечное нечёткое множество A отождествляется с ковектором значений его функции принадлежности:

$$A = \mu_A = \begin{pmatrix} \mu_A(x_1) & \dots & \mu_A(x_N) \end{pmatrix}. \tag{196}$$

Теперь весь процесс вычисления образа RA любого (чёткого, либо нечёткого) множества A при любом (чётком либо нечётком) отображении R можно существенно упростить, то есть громоздкие формулы, определяющие так называемый принцип обобщения Заде, приобретают простой и понятный компактный вид[3]:

$$M_{RA} = M_A M_R. \tag{197}$$

Таким образом, весь расчёт фактически реализуется в форме максиминной композиции отношений A и R, реализуемой путём максиминного произведения ковектора $M_A = \mu_A$ нечёткого множества A на матрицу M_R отношения R.

Пример. Пусть нечёткое множество A задано в табл. 13.

Таблица 13

Нечёткое множество

suppA	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**
μ_A	0,5	0,6	1	0,9	0,7

Рассмотрим чёткий оператор $\mathbb{R} \xrightarrow{R} \mathbb{R}$ следующего вида:

$$Rx = x^2.$$

[3] Формула предложена автором.

Определим образ RA нечёткого множества A при действии оператора R.

Вначале подействуем оператором R на элементы носителя A, то есть:

$$R(0) = 0;$$

$$R(-1) = R(1) = 1; \quad R(-2) = R(2) = 4.$$

Поэтому $suppRA = \{0, 1, 4\}$ и чёткое отношение R, рассматриваемое на $suppA$, можно задать с помощью матрицы, представленной в табл. 14.

Таблица **14**

Матрица чёткого отношения *R*

M_R	**0**	**1**	**4**
–2	0	0	1
–1	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

Вычислим соответствующее максиминное произведение:

$$\mu_{RA} = \mu_A M_R = (0{,}5 \quad 0{,}6 \quad 1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7).$$

Таким образом, образ нечёткого множества А при действии оператором R есть нечёткое множество с функцией принадлежности на $suppRA$:

$$\mu_{RA} = (1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7).$$

Результатам проведенных вычислений соответствует табл. 15.

Таблица **15**

Нечёткое множество *RA*

suppRA	**0**	**1**	**4**
μ_{RA}	1	0,9	0,7

Одним из важнейших приложений принципа обобщения Заде является так называемая **нечёткая арифметика**, в которой арифметические операции выполняются над нечёткими множествами A и B, заданными в одном и том же универсальном множестве U, которое, в свою очередь, является некоторым подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Как уже было выше сказано, декартово произведение нечётких множеств A и B характеризуется функцией принадлежности:

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}. \tag{198}$$

Поэтому, в соответствии с принципом обобщения Заде, арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления можно распространить на нечёткие множества A и B, предположив, что:

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{z=x+y}\mu_{A\times B}(x,y)=\sup_{z=x+y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}; \tag{199}$$

$$\mu_{A-B}(z)=\sup_{z=x-y}\mu_{A\times B}(x,y)=\sup_{z=x-y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}; \tag{200}$$

$$\mu_{A\cdot B}(z)=\sup_{z=xy}\mu_{A\times B}(x,y)=\sup_{z=xy}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}; \tag{201}$$

$$\mu_{A:B}(z)=\sup_{z=x:y}\mu_{A\times B}(x,y)=\sup_{z=x:y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}. \tag{202}$$

В этих формулах чётким оператором R является соответствующая арифметическая операция, а отображаемым нечётким множеством является декартово произведение $A\times B$.

Нечёткий оператор $X\xrightarrow{R}Y$ есть нечёткое отношение, рассматриваемое как действие, характеризуемое функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$ $\in[0,1]$.

Результат действия нечёткого оператора *R* на элемент *x* есть нечёткое множество:

$$Rx \subset Y; \quad (203)$$

$$\mu_{Rx}(y) = \mu_R(x, y). \quad (204)$$

Результат действия нечёткого оператора *R* на чёткое множество *A* есть нечёткое множество, обозначаемое $RA \subset Y$, представляющее результат объединения образов Rx для всех элементов $x \in A$:

$$RA = \bigcup_{x \in A} Rx; \quad (205)$$

$$\mu_{RA}(y) = \sup_{x \in A} \mu_{Rx}(y) = \sup_{x \in A} \mu_R(x, y). \quad (206)$$

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, чёткое множество $A = \{x_1, x_3, x_4\}$, а нечёткий оператор, то есть нечёткое бинарное отношение R действует из X в Y и задано матрицей M_R:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mu_{RA} = \mu_A M_R = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix} = (0{,}5 \quad 0{,}6 \quad 1).$$

Результат действия нечёткого оператора *R* на нечёткое множество *A* есть нечёткое множество $RA \subset Y$, представляющее результат объединения образов Rx для элементов $x \in A$:

$$RA = \bigcup_{x \in X} \left(A \cap Rx\right); \quad (207)$$

$$\mu_{RA}(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_{Rx}(y)\} = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}. \quad (208)$$

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, а нечёткий оператор, то есть нечёткое бинарное отношение R, действует из X в Y и задано матрицей M_R:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $\mu_A = (1 \quad 0,8 \quad 0,5 \quad 0,2)$. Тогда

$$\mu_{RA} = \mu_A M_R = (1 \quad 0,8 \quad 0,5 \quad 0,2) \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 1 \end{pmatrix} = (0,4 \quad 0,5 \quad 0,7).$$

3.5. Нечёткие множества в задачах системной оценки рисков чрезвычайных ситуаций

Одними из перспективных приложений нечёткой логики и теории нечётких множеств являются решение задач нечёткой классификации и оценка рисков деструктивных событий, в частности, чрезвычайных ситуаций.

В [6] приводится схема, иллюстрирующая основные методы количественной оценки рисков чрезвычайных ситуаций (рис. 40).

Традиционно в исследованиях и определении рисков чрезвычайных ситуаций в нашей стране используется методология наиболее общего математически формализованного подхода, который имеет следующий вид:

$$R = f(\mathbb{P}, U), \tag{209}$$

где:

$\mathbb{P}$ – статистическая оценка вероятности (частота) реализации угроз;

U – ущерб от реализующихся угроз.

То есть, в рамках стандартного подхода, риск чрезвычайных ситуаций рассматривается как функция двух аргументов: частоты реализации чрезвычайных ситуаций и ущерба, причиняемого ими.

В контексте **теоретико-вероятностного подхода** к определению риска эта функция формализуется как среднее ожидаемое значение ущерба, то есть имеет вид:

$$R = \mathbb{E}U, \tag{210}$$

где $\mathbb{E}$ – оператор усреднения (математическое ожидание).

Рис. 40. Основные методы количественной оценки риска чрезвычайных ситуаций

Управление рисками чрезвычайных ситуаций обозначает комплекс системно согласованных мероприятий, направленных на достижение двух главных целей: снижение уровня риска (вероятности) и смягчение последствий (ущерба).

В [9] отмечается, что наиболее распространенным подходом в прогнозировании развития опасностей и их поражающих воздействий на население, объекты и территории является статистический анализ динамических рядов параметров и данных о чрезвычайных ситуациях для последующего построения трендовых зависимостей развития опасных процессов и их последствий. Однако, в силу нелинейности воздействия поражающих факторов, по трендовым моделям не всегда удается предсказать последствия воздействия негативных факторов и степень поражения объекта и прилегающей территории, а также оценить степень защищенности населения и территории от угроз природного и техногенного характера.

Поэтому инструментарий, основанный на анализе статистических данных о чрезвычайных ситуациях, нуждается в дополнении другими методами анализа и прогноза развития как источников чрезвычайных ситуаций, так и оценки их последствий с учетом состояния объектов экономики и инфраструктуры, систем инженерной защиты населения и территорий [9].

В настоящее время использование методов индексов риска является перспективным направлением оценки и управления рисками

ЧС, принятым в зарубежных странах. В частности, Европейская комиссия начиная с 2012 г.. развивает первый глобальный, объективный, открытый информационный проект Index for Risk Management (INFORM) [5] для понимания рисков гуманитарных катастроф, основанный на методах индексов риска.

Методология INFORM основана на комплексной оценке трёх составляющих интегрального показателя риска:

степени опасностей;

уровня уязвимости;

потенциала противодействия угрозам и опасностям.

Этот подход позволяет получать прогнозную оценку рисков ЧС на основе построения трендов опасностей, уязвимостей и отсутствия потенциалов противодействия. INFORM является также сравнительным инструментом для выявления наиболее опасных и уязвимых регионов, районов, муниципалитетов [6].

Интегральный индекс риска INFORM включает около 50 различных индикаторов для измерения опасностей и воздействия на них, показателей уязвимости и определения необходимых ресурсов для купирования опасностей и определяется как среднее геометрическое по формуле [6]:

$$R = \sqrt[3]{H \cdot V \cdot L}, \tag{211}$$

где:

H – индикатор опасностей и угроз;

V – индикатор уязвимости;

L – индикатор недостаточности потенциала противодействия опасностям и угрозам.

Индикатор опасностей и угроз включает индикаторы по природным и техногенным опасностям, которые, в свою очередь, подразделяются на подгруппы. Индикатор уязвимости характеризует состояние уязвимости и включает две группы индикаторов: индикаторы социально-экономической уязвимости и индикаторы уязвимых групп населения. Индикатор отсутствия потенциала противодействия показывает недостаточность ресурсов, которые необходимы для противодействия и предупреждения опасностей и угроз.

В соответствии со структурой интегрального показателя риска индикаторы распределены по трем группам, в каждой из которых соответствующий индекс оценивается по 10-балльной интервальной шкале, которая включает в себя 4 интервала, числовые значения границ которых получены в результате анализа большого объема статистических данных с использованием методов теории нечетких множеств. Чем ближе значение индикатора к нулю, тем более благоприятна ситуация в том аспекте, который измеряется соответствующим индикатором. Напротив, значения индикатора, близкие к 10, характеризуют ситуацию как более опасную (табл. 16).

Таблица 16

Интервалы изменения индикаторов риска в методологии INFORM

Уровень индикатора	Интервалы изменения каждой группы индикаторов			Интегральный индекс риска
	Опасности и угрозы	Уязвимость	Отсутствие потенциала противодействия угрозам	
Низкий	0–1,54	0–1,83	0–3,32	0–2,3
Средний	1,54–2,71	1,83–3,2	3,32–4,95	2,3–3,25
Высокий	2,71–4,38	3,2–5,06	4,95–6,73	3,25–4,64
Очень высокий	4,38–10	5,06–10	6,73–10	4,64–10

В [8] предлагается обобщенное представление интегрального индекса риска как некоторой функции трёх аргументов:

$$R = f(H, V, L). \tag{212}$$

Наиболее универсальное представление функции f реализуется путём введения скалярных весовых коэффициентов, то есть чисел α, β, γ, удовлетворяющих двум условиям: неотрицательности и нормированности:

$$\alpha, \beta. \gamma \geq 0; \tag{213}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{214}$$

Таким образом, весовые коэффициенты α, β, γ могут принимать произвольные значения из интервала от нуля до единицы, но так, чтобы не нарушалось условие нормированности.

В частности, интегральный индекс риска можно представить в форме производственной функции Кобба-Дугласа:

$$R = \lambda H^{\alpha} V^{\beta} L^{\gamma}, \tag{215}$$

где λ – неотрицательный скалярный масштабный множитель.

Эта формула является более общей, так как позволяет учитывать веса влияния входящих в нее факторов. Веса позволяют варьировать вклад каждой из трех групп индикаторов в интегральный индекс риска и могут определяться экспертами с использованием соответствующего математического инструментария, в частности: метода анализа иерархий и метода Делфи.

Отметим, что логарифмирование интегрального индекса риска позволяет перейти к линейному представлению:

$$\ln R = \ln \lambda + \alpha \ln H + \beta \ln V + \gamma \ln L. \tag{216}$$

Такое представление удобно для решения задачи параметрической идентификации рассматриваемой модели, то есть оценивания скалярных параметров λ, α, β, γ по известным значениям показателей R, H, V, L.

Основная идея дистанционной оценки риска для населения и территорий муниципальных образований и субъектов Российской Федерации заключается в том, что данные для оценки должны быть получены из открытых баз данных, автоматически запрашиваться и обрабатываться без привлечения экспертов [9].

В методологии дистанционной оценки риска, созданной в рамках НИР [7], за основу также взяты три составляющие индекса риска: опасность, уязвимость и потенциал противодействия.

В качестве индикаторов рассматриваются:

1) весь спектр возможных опасностей и угроз природного и техногенного характера, свойственных данной территории (опасность);

2) состояние защищаемого объекта (территории) (уязвимость);

3) наличие и состояние системы инженерной защиты, системы информирования населения и реагирования на чрезвычайные ситуации (потенциал противодействия угрозам).

В качестве основных опасностей для субъектов Российской Федерации наиболее характерны:

- наводнения и нагонные явления;
- сейсмическая активность;
- оползни, сели, лавины;
- природные пожары;
- ураганы, смерчи, сильные ветры;
- подтопления;
- техногенные ЧС на потенциально опасных объектах (ПОО) (радиационно, химически, пожаровзрывоопасных, гидротехнических сооружениях);
- техногенные ЧС на транспортных коммуникациях;
- техногенные ЧС на транспорте.

В качестве параметров уязвимости рассматриваются:

- уязвимость населения, включая уязвимые группы (инвалиды, дети и пр.);
- уязвимость потенциально опасных объектов (с учетом износа);
- уязвимость объектов ЖКХ (с учетом износа);
- уязвимость территории (отсутствие систем инженерной защиты).

В качестве потенциала противодействия рассматриваются:

- системы оповещения и информирования;
- системы реагирования на ЧС;
- системы инженерной защиты;
- запасы резервов финансовых и материальных ресурсов, медицинских средств и пр.

Система показателей для формирования каждой из трех составляющих интегрального индекса риска формируется с учетом показателей, обозначенных в приказе МЧС России от 25.10.2004 № 484 «Об утверждении типового паспорта безопасности территорий субъектов Российской Федерации и муниципальных образований».

Кроме указанных показателей в интегральном индексе риска используются показатели, характеризующие социально-экономическое развитие субъекта и муниципальных образований.

При выполнении технологии дистанционной оценки риска в полном объеме использовались открытые данные из порталов следующих федеральных органов исполнительной власти:

- Росстат;
- Минприроды России;
- Ростехнадзор;
- органы исполнительной власти субъектов;
- местные органы исполнительной власти муниципальных образований.

Основные открытые данные Российской Федерации находятся на портале открытых данных Российской Федерации [8]. Этот портал является одним из ключевых инструментов реализации государственной политики в области открытых данных, в связи с чем ему отводится роль системообразующего элемента, ядра экосистемы открытых данных Российской Федерации.

Технология «Дистанционная оценка риска ЧС» предназначена для выполнения расчетной части оценки рисков и подготовки материалов для портала Российского научного общества анализа риска (РНОАР). Исходные данные, использованные в процессе расчета, а также результаты самого расчета доступны для просмотра на web-портале РНОАР [11].

Таким образом, методология INFORM представляется новым перспективным инструментом анализа и управления рисками чрезвычайных ситуаций. Предложенное выше обобщенное представление интегрального индекса риска, основанное на введении весовых коэффициентов, позволит повысить «гибкость» международной методологии INFORM.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит принципиальное отличие неопределенности, порождаемой нечеткостью, от стохастической (вероятностной) неопределенности?

2. Сформулируйте определение функции принадлежности нечеткого множества. Приведите примеры нечетких множеств.

3. Назовите основные характеристики нечетких множеств. Какие элементы считают самыми нечеткими?

4. Сформулируйте определение нечеткого подмножества и основных операций над нечеткими множествами. В чем главная отличительная особенность этих операций в сравнении с четкими множествами?

5. Сформулируйте теорему о декомпозиции нечеткого множества по сечениям заданного уровня.

6. Как можно определить расстояние между нечеткими множествами?

7. Сформулируйте определение декартова произведения для нечетких множеств. Приведите примеры нечетких отношений. Как можно интерпретировать нечеткое отношение?

8. Как вычисляются обращение и композиция нечетких отношений?

9. Сформулируйте принцип обобщения Заде. Как проще всего рассчитать результат действия нечеткого оператора на нечеткое множество?

10. Опишите основные подходы к оценке риска чрезвычайных ситуаций. В чем суть методологии INFORM?

Литература

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets. Information and Control, Vol. 8, pp. 338–353. (1965).
2. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, No. 1, pp. 3-28 (1978).
3. *Лисицына Л.С.* Основы теории нечетких множеств. СПб.: Университет ИТМО, 2020. 74 с.
4. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 208 с.
5. Индекс для управления рисками: http://www.informindex.org.
6. Управление рисками техногенных катастроф и стихийных бедствий: пособ. для руковод. организ: Моногр. / Под общ. ред. М. И. Фалеева. М.: РНОАР, 2016. 270 с.
7. НИР «Разработка методологии и технологии дистанционной оценки риска чрезвычайных ситуаций для субъектов Российской Федерации и муниципальных образований», выполнена в рамках Соглашения № 3-НКО-17 от 29.05.2017 «О предоставлении субсидии на государственную поддержку социально ориентированных

некоммерческих организаций», заключенного между Заказчиком и Министерством Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий.

8. О необходимости использования и обобщении методологии INFORM для управления рисками чрезвычайных ситуаций / А.О. Жуков, Л.А. Жукова // Технологии гражданской безопасности. 2016. Т 13. № 3 (49). С. 44–48.
9. Методология и технология дистанционной оценки риска / М.И. Фалеев, И.Ю. Олтян, Е.В. Арефьева, М.В. Болгов // Проблемы анализа риска. 2018. Т. 15. № 4. С. 6–19.
10. Портал открытых данных Российской Федерации: www.data.gov.ru.
11. Web-портал дистанционной оценки риска ЧС: www.diorisk.sra-russia.ru.

4. Основные подходы к раскрытию неопределённости в задачах системного анализа

4.1. Основные виды неопределённости в задачах системного анализа

Важнейшим свойством прикладных системных задач является наличие неопределённости. Задачи, не содержащие неопределённость, являются скорее исключением, чем правилом. Адекватное описание проблемы практически всегда содержит неопределённость, являющуюся следствием неполноты и неточности информации об исследуемой проблеме.

Подходы к раскрытию неопределённости в задачах системного анализа и теории принятия решений во многом формально схожи. Но есть и существенные отличия в подходах к формализации, решению и практической реализации. Так, задачи теории принятия решений часто математически более строго формализованы, поскольку в их математических моделях априори задаются все ограничения, допустимые множества и другие исходные данные, необходимые для их решения. В задачах же системного анализа часть ограничений, допущений и исходных данных заранее не изучена. Информация о них уточняется в процессе формализации и решения задачи.

Системная неопределённость включает в себя много разных составляющих, в частности, согласно [1] выделяют целевую, ситуационную и информационную неопределенность.

Целевая неопределённость – это неопределённость выбора оптимального решения, возникающая в задачах многокритериальной оптимизации.

Ситуационная неопределённость – это неопределённость знаний о возможных ситуациях, обусловленная воздействием неконтролируемых факторов.

Информационная неопределённость конфликтных ситуаций – это неопределённость выбора оптимальных стратегий и планов в процессе взаимодействия (сотрудничества) партнёров и противодействия конкурентов.

Мы сосредоточим основное внимание на методах раскрытия целевой неопределённости, поскольку раскрытие ситуационной и информационной неопределённости основывается на более сложных аналитических подходах, которые, тем не менее, имеют много общего с подходами, применяемыми для раскрытия целевой неопределённости.

4.2. Многокритериальность как фактор неопределённости

В классических задачах однокритериальной оптимизации **цель** единственна и состоит в **минимизации** либо **максимизации** одного единственного, априори заданного, **целевого критерия *E*** (называемого также **критерием эффективности**), действующего на заданном **допустимом множестве *X***, элементами которого являются **допустимые альтернативы**.

В прикладных системных задачах каждая альтернатива A описывается соответствующим **вектором параметров** $x_A \in \mathbb{R}^n$. Этот вектор условно отождествляют с альтернативой, в связи с чем говорят, что альтернатива – это вектор, задающий точку -мерного арифметического (координатного) пространства $\mathbb{R}^n$, хотя на самом деле альтернативой может быть объект, имеющий материальную, а не абстрактно-математическую природу [2].

Целевой критерий – это оператор E, заданный на множестве X допустимых альтернатив:

$$X \xrightarrow{E} \mathbb{R}. \tag{217}$$

Математически этот оператор E есть некоторое действие, позволяющее для каждой допустимой альтернативы x из множества X получить её числовую оценку Ex в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

В экономических приложениях число Ex интерпретируется как эффективность альтернативы x относительно заданного целевого критерия E.

Оптимальная альтернатива – это допустимая альтернатива $x^* \in X$, удовлетворяющая цели минимизации либо максимизации критерия E.

Оптимальная альтернатива рассматривается как наилучшая с точки зрения критерия E. В частности, для задачи максимизации оптимальное, то есть максимальное, значение критерия есть число:

$$Ex^* = \max Ex. \tag{218}$$

Оптимальное решение задачи – это множество всех оптимальных альтернатив.

Если в постановке задачи нет дополнительных условий, кроме естественного требования $x^* \in \mathbb{R}^n$, то такая задача называется **безусловной**:

$$Ex \to \min \qquad \text{либо} \qquad Ex \to \max. \tag{219}$$

В противном случае, когда часть допустимых альтернатив исключается из рассмотрения дополнительными условиями, задача называется **условной**.

Эти дополнительные условия называются **ограничениями**.

Математически ограничения могут быть представлены в виде **равенств** (уравнений), **неравенств** (причём в оптимизационных задачах ограничения-неравенства всегда нестрогие) либо теоретико-множественных **включений**, определяющих факт принадлежности допустимых альтернатив x соответствующим допустимым множествам.

Ограничения всегда усложняют задачу и сужают исходное множество допустимых альтернатив.

В классической теории оптимизации и теории принятия решений разработаны специальные аналитические и численные методы решения для разных классов однокритериальных оптимизационных задач.

Дуальность целей максимизации и минимизации. Заметим, что любая задача минимизации может быть сведена к задаче максимизации, перейти к которой можно одним из следующих двух способов.

Аддитивный подход. В качестве нового целевого критерия используется противоположный по знаку целевой критерий исходной задачи:

$$Ex \to \min \quad \Leftrightarrow \quad -Ex \to \max, \tag{220}$$

причём:

$$\max(-Ex) = -\min Ex \quad \text{и} \quad \min(-Ex) = -\max Ex. \qquad (230)$$

Мультипликативный подход. В качестве нового целевого критерия используется обратный целевой критерий исходной задачи:

$$Ex \to \min \quad \Leftrightarrow \quad (Ex)^{-1} \to \max, \qquad (231)$$

причём:

$$\max(Ex)^{-1} = (\min Ex)^{-1} \quad \text{и} \quad \min(Ex)^{-1} = (\max Ex)^{-1}. \qquad (232)$$

Отметим, что мультипликативный подход удобен в тех случаях, когда целевой критерий исходной задачи принимает значения только одного знака: только положительные или только отрицательные, и необходимо сохранить этот знак при переходе к новой оптимизационной задаче.

Рассмотрим принципиальные особенности, отличающие задачи векторной (многокритериальной) оптимизации от задач классической однокритериальной оптимизации.

При исследовании, создании и управлении любой сложной системой часто возникает проблема согласования её целей, которые описываются соответствующими целевыми критериями, как правило, имеющими разную природу, обусловленную различием их физического, химико-биологического, технического, экономического или другого содержания.

Поэтому в отличие от классических задач в системном анализе чаще приходится иметь дело не с однокритериальными, а с многокритериальными задачами [3].

Задачи многокритериальной (векторной) оптимизации в отличие от классических однокритериальных задач являются **многоцелевыми**.

Показателем эффективности достижения каждой отдельной цели является соответствующий **частный скалярный целевой критерий оптимальности**, то есть каждая цель формализуется в виде соответствующей однокритериальной задачи минимизации или максимизации частного критерия эффективности.

В силу рассмотренной выше дуальности целей минимизации и максимизации, без ограничения общности дальнейшего изложения, можно считать, что каждый частный целевой критерий подлежит максимизации:

$$\begin{cases} E_1 x \to \max \\ E_2 x \to \max \\ \quad\vdots \\ E_N x \to \max \end{cases}. \tag{233}$$

В векторных обозначениях эта задача может быть записана в более компактной форме:

$$\vec{E}x \to \max, \tag{234}$$

где $\vec{E}$ – **критериальный оператор** $X \xrightarrow{\vec{E}} \mathbb{R}^N$, то есть **векторный критерий оптимальности**, компонентами которого являются частные критерии:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix}. \tag{235}$$

Таким образом, эффективность каждой альтернативы x аналитически может быть охарактеризована её координатами в многомерном **критериальном пространстве** $\mathbb{R}^N$.

Геометрически каждой допустимой альтернативе $x \in X$ соответствует некоторая точка, задаваемая вектором $\vec{E}x$ в этом пространстве:

$$\vec{E}x = \begin{pmatrix} E_1 x \\ E_2 x \\ \vdots \\ E_N x \end{pmatrix}. \tag{236}$$

Выше мы отмечали, что условные задачи сложнее безусловных.

Но даже безусловные многокритериальные задачи являются сложными, поскольку в отличие от однокритериальных, как правило, содержат в своей постановке **целевую неопределённость**, то есть **конфликт противоречивых целей**.

Причём конфликт этот является неустранимым, поскольку неустранима сама причина его возникновения, – различные критерии максимизируются, как правило, разными альтернативами. Более того, нередко альтернатива, максимизирующая один из частных критериев, минимизирует другой.

Следовательно, с классической точки зрения многокритериальные задачи, в общем случае, являются некорректно поставленными в том смысле, что не имеют решения, то есть, как правило, ***не существует оптимальной альтернативы, оптимизирующей все частные целевые критерии одновременно***.

Пример. На рис. 41, на примере задачи одновременной максимизации двух целевых критериев, наглядно демонстрируется ситуация отсутствия решения такой двухкритериальной задачи в классическом смысле.

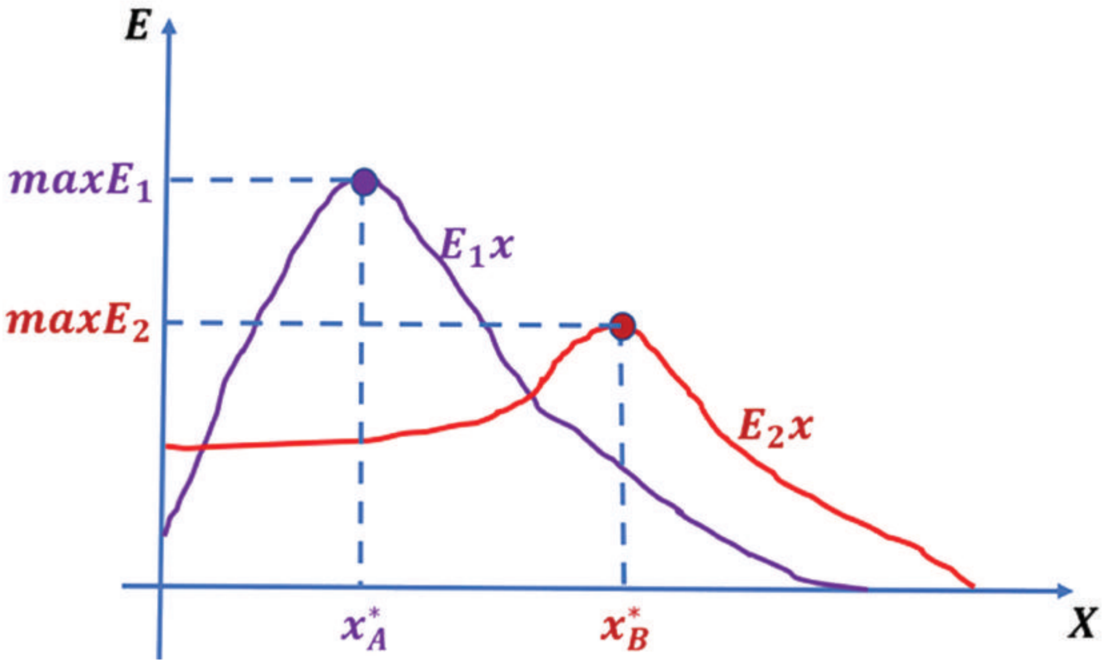


Рис. 41. Иллюстрация неразрешимости в классическом смысле задачи одновременной максимизации двух целевых критериев

Поэтому решение таких задач, как и других сложных прикладных задач системного анализа, требует поиска **рационального компромисса**.

Таким образом, проблема раскрытия целевой неопределённости сводится к отысканию допустимой альтернативы, обеспечивающей рациональный компромисс заданных целей [1, 3].

4.3. Классификация подходов к раскрытию целевой неопределённости

Рис. 42. Классификация методов решения задач многокритериальной оптимизации

Для нахождения рационального компромисса применяются **два основных подхода**.

Первый подход состоит в сужении допустимого множества, то есть исключении из анализа заведомо не пригодных допустимых альтернатив.

Второй подход состоит в замене многокритериальной задачи оптимизации на однокритериальную и нахождении оптимального решения однокритериальной задачи.

4.4. Парето-оптимальное решение задач векторной оптимизации

Как уже говорилось выше, критериальный оператор $\vec{E}$ позволяет определить для каждой альтернативы $x \in X$ вектор её эффективности $y = \vec{E}x$, который задаёт соответствующую точку в пространстве критериев эффективности:

$$y = \vec{E}x; \tag{237}$$

$$y_A = \vec{E}x_A \qquad y_B = \vec{E}x_B. \tag{238}$$

Альтернативы x_A и x_B назовём **эквивалентными**, если векторные оценки их эффективности совпадают, то есть:

$$\left(x_A \sim x_B\right) \Leftrightarrow \left(\vec{E}x_A = \vec{E}x_B\right). \tag{239}$$

Эквивалентным альтернативам x_A и x_B соответствует одна и та же точка критериального пространства $y_A = y_B$, то есть эти альтернативы не различимы в контексте действующей системы целевых критериев $\vec{E}$.

Нетрудно убедиться в том, что это отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть действительно представляет собой эквивалентность в пространстве альтернатив.

Это отношение эквивалентности реализует разбиение пространства альтернатив на попарно не пересекающиеся классы эквивалентных альтернатив. Далее мы будем отождествлять каждый такой класс с оказавшимися в нём эквивалентными альтернативами.

Пусть внутри допустимого множества X выбрана некоторая альтернатива x_A.

Ясно, что такой выбор можно улучшить, если удастся выбрать некоторую другую альтернативу x_B, характеризующуюся более эффективными в смысле целевых критериев значениями своих координат, то есть в этом случае выбор альтернативы x_B предпочтительнее выбора альтернативы x_A. Формализуем математически эту идею.

Нестрогое доминирование векторных оценок эффективности альтернатив в пространстве критериев эффективности для задачи многокритериальной максимизации имеет вид:

$$(y_A \preccurlyeq y_B) \Leftrightarrow (y_A \leq y_B). \tag{240}$$

Здесь нестрогое неравенство типа «меньше либо равно» понимается в покомпонентном смысле. Если высказывание $(y_A \preccurlyeq y_B)$ является истинным, то говорят, что y_B **нестрого доминирует** y_A и в этом смысле выбор альтернативы x_B лучше, чем x_A.

В общем же случае, для произвольной задачи многокритериальной оптимизации знаки нестрогих неравенств выставляются в соответствии с целью улучшения, то есть максимизации, либо минимизации соответствующего целевого критерия.

Оценки эффективности y_A и y_B **сравнимы**, если высказывание

$$(y_A \preccurlyeq y_B) \vee (y_B \preccurlyeq y_A) \tag{241}$$

является истинным.

В противном случае, то есть, когда это высказывание ложно, а значит истинно отрицание этого высказывания, образы y_A и y_B **не сравнимы**:

$$\overline{(y_A \preccurlyeq y_B) \vee (y_B \preccurlyeq y_A)} = (y_A \npreccurlyeq y_B) \wedge (y_B \npreccurlyeq y_A). \tag{242}$$

Пример. Для задачи двухкритериальной максимизации очевидно следующее:

$$\binom{2}{5} \preccurlyeq \binom{7}{9}.$$

Но

$$\binom{2}{5} \npreccurlyeq \binom{3}{4} \quad \text{и} \quad \binom{3}{4} \npreccurlyeq \binom{2}{5}.$$

Строгое доминирование векторных оценок эффективности альтернатив в пространстве критериев эффективности для произвольной задачи многокритериальной оптимизации определяется следующим образом:

$$(y_A \prec y_B) \Leftrightarrow \big((y_A \preccurlyeq y_B) \wedge (y_A \neq y_B)\big). \tag{243}$$

В частности, для задачи многокритериальной максимизации имеем:

$$(y_A \prec y_B) \Leftrightarrow \begin{cases} y_A^1 \le y_B^1 \\ y_A^2 \le y_B^2 \\ \vdots \\ y_A^N \le y_B^N \\ \exists k\ y_A^k < y_B^k \end{cases} \qquad (244)$$

Как уже было сказано, в общем случае, для произвольной задачи многокритериальной оптимизации знаки нестрогих неравенств выставляются в соответствии с целью улучшения, то есть максимизации, либо минимизации соответствующего целевого критерия [1, 3].

Пусть X – множество всех альтернатив, а Y – множество векторов их эффективности, то есть:

$$Y = \vec{E}X. \qquad (245)$$

Парето-фронт – это подмножество P_Y границы ∂Y множества Y, состоящее из строго не доминируемых векторов эффективности альтернатив, то есть:

$$P_Y \subset \partial Y; \qquad (246)$$

$$(y^* \in P_Y) \Leftrightarrow (\forall y \in Y\ y^* \nprec y). \qquad (247)$$

Это определение можно представить следующим образом:

$$(y^* \in P_Y) \Leftrightarrow (\forall y \in Y \left(y \prec y^*\right) \vee \left(y \text{ и } y^* \text{ не сравнимы}\right)). \qquad (248)$$

Таким образом, каждый вектор $y^* \in P_Y$ Парето-фронта P_Y строго доминирует любой другой вектор $y \in Y$ либо векторы $y^* \in P_Y$ и $y \in Y$ не сравнимы в смысле бинарного отношения строгого доминирования. Кроме того, все точки (векторы) Парето-фронта попарно не сравнимы между собой.

Множество Парето – это подмножество P_X в множестве альтернатив, векторные оценки эффективности которых принадлежат Парето-фронту, то есть строго недоминируемы.

$$P_Y = \vec{E} P_X \quad \Rightarrow \quad P_X = \vec{E}^{-1} P_Y. \tag{249}$$

Принцип оптимальности Парето утверждает, что **рациональные компромиссные решения** задачи многокритериальной оптимизации образуют множество Парето.

Геометрические методы визуализации Парето-фронта

Метод отбора конусом удобен лишь для двухкритериальных задач.

В этом методе формируется конус, охватывающий часть плоскости, ограниченную лучами, исходящими из одной вершины.

Лучи, ограничивающие конус, должны проходить параллельно координатным осям и, соответственно, перпендикулярно друг другу.

Направление каждого луча должно соответствовать цели – максимизации либо минимизации соответствующего целевого критерия.

Далее, путём параллельного переноса вершина конуса совмещается с исследуемой точкой $Y = \vec{E} X$ критериального пространства.

Если при совмещении вершины конуса с исследуемой точкой кроме неё внутри конуса либо на каком-либо ограничивающем этот конус луче окажется хотя бы одна точка множества Y, то исследуемая точка, к которой приложена вершина конуса, исключается из рассмотрения и, соответственно, не принадлежит Парето-фронту.

В противном случае точка, с которой совмещена вершина конуса, включается в Парето-фронт.

Очевидно, исследованию подлежат лишь точки, расположенные вблизи границы ∂Y исследуемого множества Y.

В задачах, в которых число критериев превышает два, более наглядным и удобным инструментом является радарная диаграмма либо диаграмма в параллельных координатах.

Пример. На рис. 43 представлены оценки эффективности альтернатив в критериальной плоскости.

Если оба целевых критерия подлежат максимизации, то Парето-фронт P_Y представляет собой множество трёх точек:

$$\big((E_1 \to \max) \wedge (E_2 \to \max)\big) \Rightarrow \big(P_Y = \{A, B, C\}\big).$$

Следует обратить внимание, что отрезок EA параллелен оси абсцисс, а отрезок DC параллелен оси ординат.

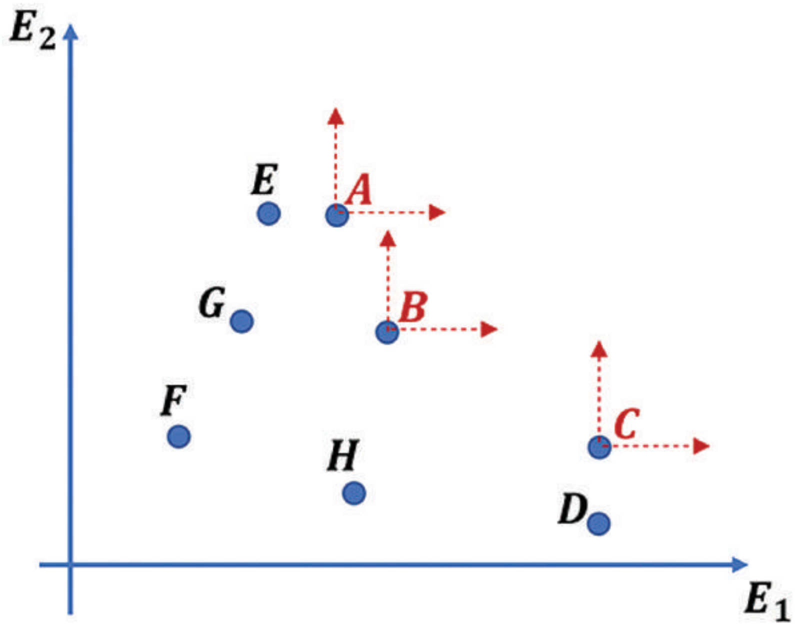


Рис. 43. Координаты альтернатив в плоскости целевых критериев

Соответственно, A улучшает E по первому критерию при неизменном втором, а C улучшает D по второму критерию при неизменном первом.

Таким образом, точки D и E не принадлежат Парето-фронту P_Y.

Пример. На рис. 44 представлены оценки эффективности альтернатив в критериальной плоскости.

Если оба целевых критерия подлежат максимизации, то Парето-фронт P_Y представляет собой множество, состоящее из двух точек:

$$\big((E_1 \to \max) \wedge (E_2 \to \max)\big) \Rightarrow \big(P_Y = \{A, C\}\big).$$

Следует обратить внимание, что конус, исходящий из вершины B, содержит внутри себя точку A.

Таким образом, точка B не принадлежит Парето-фронту P_Y.

Метод радарных диаграмм позволяет визуализировать многомерные данные и реализован программно, в частности, в Microsoft Excel.

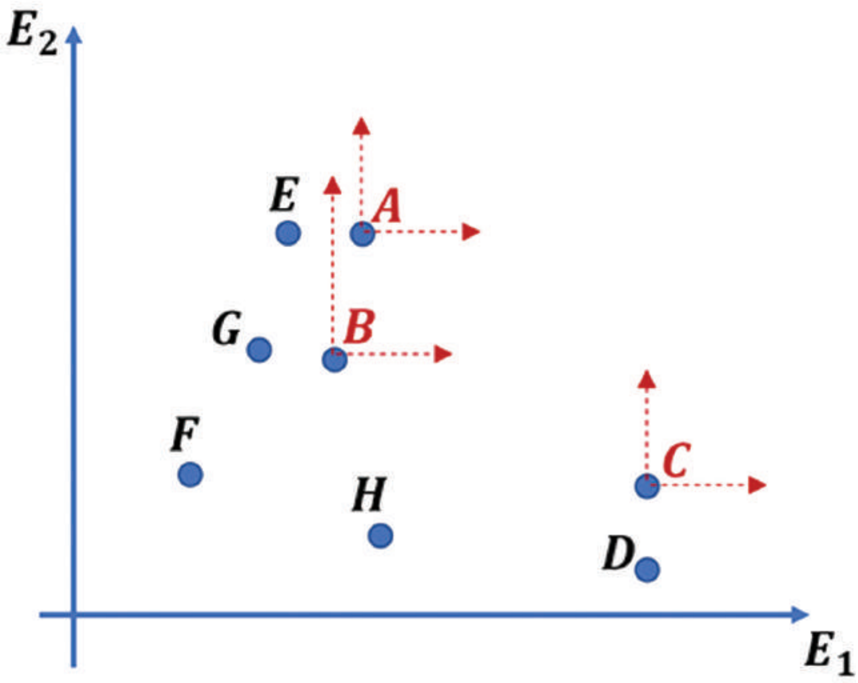


Рис. 44. Координаты альтернатив в плоскости целевых критериев

Метод диаграмм в параллельных координатах (автор метода – Альфред Инсельберг) предполагает изображение образа каждой альтернативы в виде ломаной линии.

На таких диаграммах целевым критериям соответствуют параллельные, вертикально направленные координатные оси, расположенные эквидистантно, то есть равноудалённо друг от друга. Координатные оси проходят перпендикулярно горизонтальной прямой, соответствующей нулевому значению целевых критериев. Программная реализация этого метода доступна, например, в языке R.

Программно-аналитические методы построения Парето-фронта опираются на методы динамического программирования, генетические алгоритмы и другие. В силу повышенной математической сложности этих методов, их рассмотрение выходит за рамки нашего курса.

Таким образом, реализация идеи сужения множества допустимых альтернатив в задачах многокритериальной оптимизации осуществляется путём нахождения в критериальном пространстве Парето-фронта, а затем и его прообраза, то есть множества Парето, как подмножества в множестве допустимых альтернатив:

$$P = \vec{E}^{-1} F. \tag{250}$$

Такой подход позволяет отбраковать, то есть исключить из дальнейшего анализа и выбора заведомо не пригодные допустимые альтернативы.

Ясно, что в отличие от однокритериальных оптимизационных задач решение задачи многокритериальной оптимизации, как правило, не единственно, а представляет собой множество альтернатив – множество Парето, являющееся прообразом найденного Парето-фронта.

Очевидно, что элементы множества Парето попарно не сравнимы между собой и в этом смысле альтернативы, вошедшие в множество Парето, являются равноценными.

С точки зрения системного анализа Парето-оптимальные альтернативы являются рационально компромиссными, но не оптимальными решениями задачи, то есть множество Парето подлежит дальнейшему сужению с целью выбора единственной оптимальной альтернативы.

Как правило, дальнейший выбор оптимального решения базируется на использовании дополнительной информации и реализуется путём глубокого анализа проблемной ситуации с целью получения решения, системно-согласованного с имеющимися ресурсными ограничениями, действующими факторами неопределённости, а также возможными условиями функционирования исследуемой системы.

В качестве наглядного примера рассмотрим следующую задачу.

Пример. Построим множество Парето-оптимальных альтернатив по исходным данным, приведенным в табл. 17, если оба критерия подлежат максимизации.

Таблица 17

Пример результатов сравнения альтернатив по двум скалярным критериям эффективности

№	Альтернативы	Критерий E1	Критерий E2
1	A1	100	50
2	A2	130	30
3	A3	70	90
4	A4	160	50
5	A5	90	100
6	A6	80	100
7	A7	100	60
8	A8	110	25
9	A9	160	90
10	A10	130	70

Решение. Критериальное пространство этой задачи, очевидно, является двумерным. Поэтому решение задачи удобно визуализировать.

Каждую альтернативу будем рассматривать как точку плоскости с координатами (E1, E2). Соответствующая точечная диаграмма представлена на рис. 45.

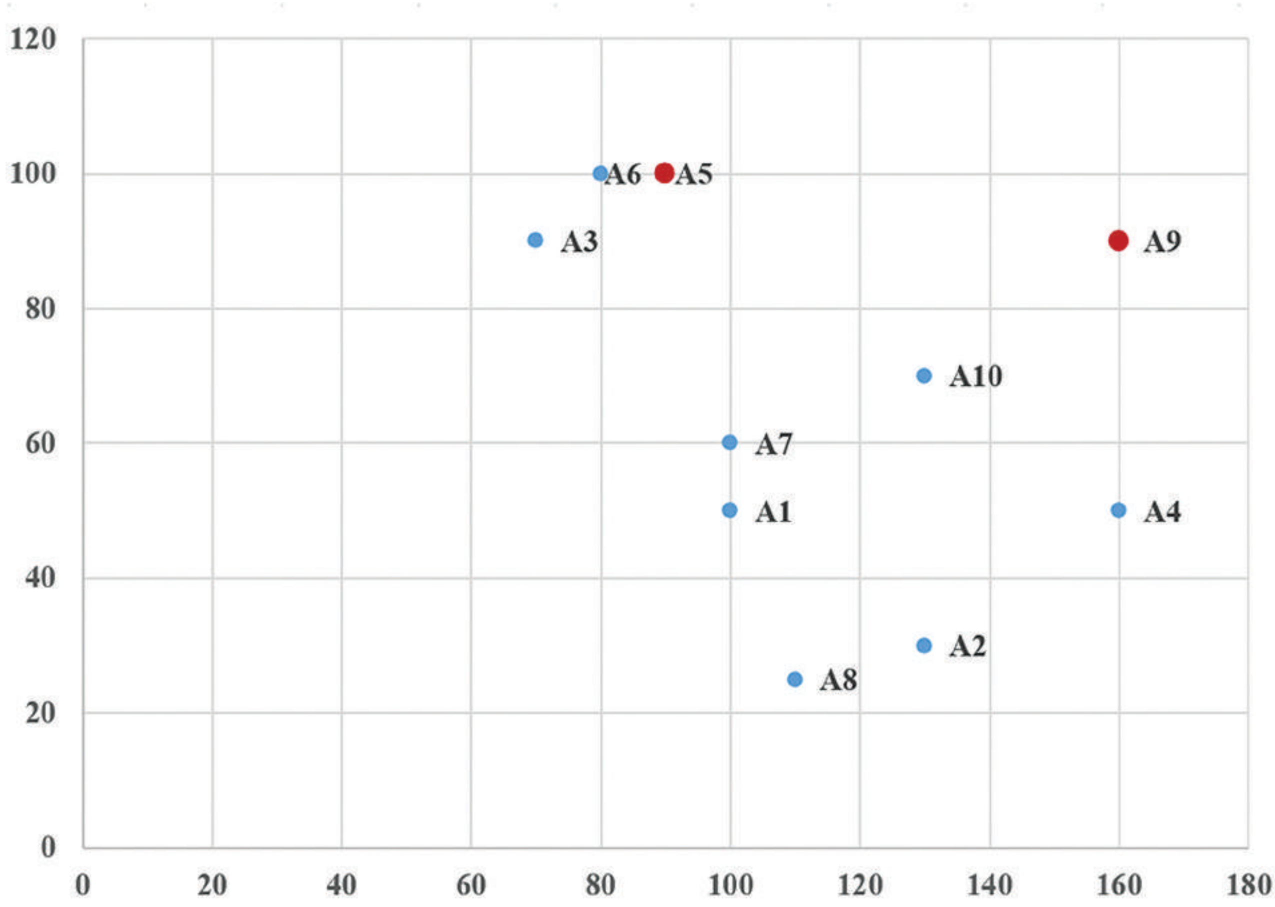


Рис. 45. Точечная диаграмма распределения альтернатив в критериальном пространстве

Так как оба целевых критерия подлежат максимизации, то следует выбрать точки, расположенные как можно правее и выше. Очевидно, неулучшаемых Парето-оптимальных точек будет только две. Они выделены на диаграмме красным цветом. Этим точкам соответствуют альтернативы A5 и A9. Они будут Парето-эффективными.

Таким образом, множество Парето в этой задаче имеет вид:

$$P = \{A5, A9\}.$$

Как видим, принцип оптимальности Парето позволяет существенно сузить (сократить) множество допустимых альтернатив, исключив из рассмотрения (отбраковав) заведомо не пригодные альтернативы.

Тем не менее, **принцип оптимальности Парето не позволяет выделить в множестве Парето единственное решение – оптимальную альтернативу**.

Поэтому окончательный выбор оптимального решения из множества Парето осуществляется на основе каких-либо дополнительных требований, например: целесообразности близости искомой оптимальной альтернативы к точке, соответствующей оптимальным значениям всех целевых критериев, сложности практической реализации выбранной альтернативы и так далее, либо на основе субъективных знаний, опыта и интуиции экспертов, с привлечением экспертных процедур системного анализа, рассматриваемых далее в нашем курсе.

4.5. Приёмы упрощения задач векторной оптимизации путём их сведения к однокритериальным

Для пояснения сути такого подхода рассмотрим следующий пример с пятью критериями:

$$\begin{cases} E_1x \to \max \\ E_2x \to \max \\ E_3x \to \max \\ E_4x \to \min \\ E_5x \to \min \\ x \in X \end{cases}. \qquad (251)$$

Метод суммы. В этом методе из критериев формируется один общий максимизируемый критерий. В нем значения максимизируемых критериев складываются, а минимизируемых вычитаются:

$$Ex = E_1x + E_2x + E_3x - E_4x - E_5x \to \max. \qquad (252)$$

Метод линейной свёртки (метод аддитивной свёртки) целевых критериев является обобщением метода суммы. В этом методе из критериев формируется единый максимизируемый критерий, представляющий собой взвешенную сумму максимизируемых критериев. То есть значения максимизируемых критериев умножаются на свои веса и складываются, а минимизируемых – умножаются на веса и вычитаются:

$$Ex = v_1 E_1 x + v_2 E_2 x + v_3 E_3 x - v_4 E_4 x - v_5 E_5 x \to \max, \qquad (253)$$

где весовые коэффициенты v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 есть некоторые числа, которые отражают субъективную важность, то есть приоритет каждого целевого критерия, соответственно.

Выбор весовых коэффициентов, как правило, всегда является субъективным и осуществляется экспертами.

Поскольку решение задачи оптимизации сохраняется при умножении целевого функционала на произвольный положительный скаляр (число), удобно в качестве весовых коэффициентов выбрать неотрицательные (чаще положительные) числа, сумма которых равна единице.

Требование нормировки выполнить легко: достаточно выбрать любые неотрицательные числа, а затем каждое число разделить (нормировать) на сумму всех выбранных чисел.

Метод пропорциональности. В этом методе из критериев формируется один общий максимизируемый критерий. В нем значения максимизируемых критериев умножаются и делятся на произведение минимизируемых критериев:

$$Ex = \frac{(E_1 x)\cdot(E_2 x)\cdot(E_3 x)}{(E_4 x)\cdot(E_5 x)} \to \max. \qquad (254)$$

Метод мультипликативной свёртки целевых критериев является обобщением метода пропорциональности. В этом методе из критериев формируется единый максимизируемый критерий, представляющий собой взвешенное произведение максимизируемых критериев. Этот метод аналогичен методу аддитивной свёртки, если сложение интерпретировать как умножение, а умножение – как операцию возведения в степень:

$$Ex = \frac{(E_1x)^{\nu_1} \cdot (E_2x)^{\nu_2} \cdot (E_3x)^{\nu_3}}{(E_4x)^{\nu_4} \cdot (E_5x)^{\nu_5}} \to \max. \quad (255)$$

В принципе такая задача эквивалентна следующей:

$$\ln Ex = \nu_1 \ln E_1x + \nu_2 \ln E_2x + \nu_3 \ln E_3x - \nu_4 \ln E_4x - \nu_5 \ln E_5x \to \max. \quad (256)$$

Метод модифицированной линейной свёртки состоит в минимизации линейной свёртки относительных отклонений целевых критериев от их оптимальных значений:

$$Ex \to \min, \quad (257)$$

где:

$$Ex = \nu_1 \frac{E_1^{\max} - E_1x}{E_1^{\max} - E_1^{\min}} + \nu_2 \frac{E_2^{\max} - E_2x}{E_2^{\max} - E_2^{\min}} + \nu_3 \frac{E_3^{\max} - E_3x}{E_3^{\max} - E_3^{\min}} + $$
$$+ \nu_4 \frac{E_4^{\max} - E_4x}{E_4^{\max} - E_4^{\min}} + \nu_5 \frac{E_5^{\max} - E_5x}{E_5^{\max} - E_5^{\min}}.$$

Несмотря на широкое разнообразие представленных методов и удобство замены многокритериальной задачи однокритериальной, следует помнить о том, что однокритериальная задача, строго говоря, не эквивалентна многокритериальной и, как следствие, в общем случае, нет гарантии того, что решение однокритериальной задачи будет близким к оптимальному, и даже того, что оно попадёт в множество Парето исходной задачи [3, 4, 5].

Метод идеальной точки. Рассмотрим векторный критерий оптимальности:

$$\vec{E}x = \begin{pmatrix} E_1x \\ E_2x \\ E_3x \\ E_4x \\ E_5x \end{pmatrix}. \quad (258)$$

Оптимизировав по отдельности (вне зависимости от остальных целевых критериев) каждую компоненту этого вектора, то есть вычислив соответствующее экстремальное (наилучшее, оптимальное) её значение, получим вектор оптимальных значений целевых критериев:

$$\vec{E}^{*} = \begin{pmatrix} E_1^{*} \\ E_2^{*} \\ E_3^{*} \\ E_4^{*} \\ E_5^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max E_1 x \\ \max E_2 x \\ \max E_3 x \\ \min E_4 x \\ \min E_5 x \end{pmatrix}. \qquad (259)$$

Далее будем минимизировать евклидово расстояние между вектором целевых критериев:

$$r(x) = \rho\left(\vec{E}x, \vec{E}^{*}\right) \to \min; \qquad (260)$$

$$Rx = r^2(x) = \vec{E}x - \vec{E}^{*2} \vec{=} Ex \vec{-} E^{*}, \vec{E}x - \vec{E}^{*} \to \min. \qquad (261)$$

В этой формуле скалярное произведение вычисляется в стандартном евклидовом смысле, то есть:

$$Rx = (E_1 x - E_1^{*})^2 + (E_2 x - E_2^{*})^2 + (E_3 x - E_3^{*})^2 +$$
$$+ (E_4 x - E_4^{*})^2 + (E_5 x - E_5^{*})^2.$$

Примечание: тут между скобками все знаки «+».

Таким образом, этот метод даёт нам **минимальное отличие от идеала**.

Метод главного критерия. В этом методе оптимизируется только один из критериев – самый важный, «главный». Остальные критерии ограничиваются: максимизируемые ограничиваются снизу: «не меньше», а минимизируемые – сверху: «не больше». Ограничения выбираются из каких-либо обоснованных соображений.

Например, пусть для нашего примера самым главным критерием является целевой критерий E_1. В соответствии с исходной задачей будем требовать максимизации этого критерия, а для остальных критериев выберем соответствующие ограничения, обусловленные какими-либо дополнительными условиями практической целесообразности, то есть рациональности.

Тогда задача выбора оптимального решения, сформированная по методу главного критерия, примет вид однокритериальной задачи с ограничениями типа неравенств:

$$\begin{cases} E_1 x \to \max \\ E_2 x \ge \gamma_2^* \\ E_3 x \ge \gamma_3^* \\ E_4 x \le \gamma_4^* \\ E_5 x \le \gamma_5^* \end{cases}. \qquad (262)$$

где пороговые значения γ_2^*, γ_3^*, γ_4^*, γ_5^* определяют минимально допустимые значения целевых критериев E_2 и E_3, в то время как числа γ_4^* и γ_5^* определяют максимально допустимые значения целевых критериев E_4 и E_5, соответственно.

Метод последовательных уступок. В этом методе сначала оптимизируется самый важный критерий и определяется его оптимальное, то есть наилучшее значение (идеал). На следующем шаге допускается некоторое фиксированное ухудшение от этого оптимального значения (уступка) с целью улучшения ситуации по второму по значимости критерию. Получается условный идеал второго критерия. Далее допускается уступка от него с целью оптимизации третьего критерия и так далее.

При уступке для максимизируемого критерия от его идеала отнимаем соответствующую уступку. При уступке для минимизируемого критерия прибавляем величину уступки.

Уступки могут быть ***абсолютные*** (которые прибавляются к идеалу или вычитаются из него) или ***относительные*** (которые приводят к добавлению или вычитанию определенного количества процентов от соответствующего идеала).

Пусть, например, для нашего случая ранжирование (упорядочивание) критериев по убыванию их важности имеет вид:

$$E_1 \succ E_2 \succ E_4 \succ E_5 \succ E_3. \qquad (263)$$

Положим, из некоторых соображений целесообразности (рациональности) установлены максимально допустимые уступки:

ΔE_1 – абсолютная уступка для целевого критерия E_1;

δE_2 – относительная уступка для целевого критерия E_2;
δE_4 – относительная уступка для целевого критерия E_4;
ΔE_5 – абсолютная уступка для целевого критерия E_5;
для последнего критерия задавать уступку не надо.

Обратите внимание на знаки неравенств и алгебраические знаки перед уступками для максимизируемых и минимизируемых критериев (табл. 18).

Таблица 18

Правила составления ограничений-неравенств в процедуре раскрытия целевой неопределённости по методу последовательных уступок

Цель	**Знак неравенства**	**Знак уступки**
Максимизация	$\geq$	-
Минимизация	$\leq$	+

Тогда применение метода будет осуществляться в последовательном решении следующих однокритериальных оптимизационных подзадач.

Подзадача 1. Безусловная оптимизация целевого критерия E_1:

$$E_1 x \to \max. \tag{264}$$

В результате решения этой задачи определяем безусловный идеал $E^*{}_1$, то есть максимальное значение целевого критерия E_1.

Подзадача 2. Условная оптимизация целевого критерия E_2 *при ограничении в виде неравенства, учитывающего уступку по целевому критерию* E_1:

$$\begin{cases} E_2 x \to \max \\ E_1 x \geq E_1^* - \Delta E_1 \end{cases}. \tag{265}$$

В результате решения этой задачи определяем условный идеал $\tilde{E}_2^*$, то есть максимальное значение целевого критерия E_2, найденное при условии выполнения ограничения неравенства, указанного в формулировке задачи.

Заметим, что полученный условный идеал чаще всего не совпадает с безусловным, так как условный идеал получен при дополнительном условии.

Подзадача 3. Условная оптимизация целевого критерия E_4 при ограничениях-неравенствах, учитывающих уступки по целевым критериям E_1 и E_2:

$$\begin{cases} E_4 x \to min \\ E_1 x \geq E_1^* - \Delta E_1 \\ E_2 x \geq (1 - \delta E_2) \cdot \tilde{E}_2^* \end{cases}. \qquad .(266)$$

В результате определяем условный идеал $\tilde{E}_4^*$, то есть минимальное значение целевого критерия E_4, найденное при условии выполнения ограничений-неравенств, присутствующих в формулировке задачи.

Подзадача 4. Условная оптимизация целевого критерия E_5 при ограничениях-неравенствах, учитывающих уступки по целевым критериям E_1, E_2, E_4:

$$\begin{cases} E_5 x \to min \\ E_1 x \geq E_1^* - \Delta E_1 \\ E_2 x \geq (1 - \delta E_2) \cdot \tilde{E}_2^* \\ E_4 x \leq (1 + \delta E_4) \cdot \tilde{E}_4^* \end{cases}. \qquad (267)$$

В результате определяем условный идеал $\tilde{E}_5^*$, то есть минимальное значение целевого критерия E_5, найденное при условии выполнения ограничений-неравенств, присутствующих в формулировке задачи.

Подзадача 5. Условная оптимизация целевого критерия E_3 при ограничениях-неравенствах, учитывающих уступки по целевым критериям E_1, E_2, E_4 и E_5:

$$\begin{cases} E_3 x \to max \\ E_1 x \geq E_1^* - \Delta E_1 \\ E_2 x \geq (1 - \delta E_2) \cdot \tilde{E}_2^* \cdot \\ E_4 x \leq (1 + \delta E_4) \cdot \tilde{E}_4^* \\ E_5 x \leq \tilde{E}_5^* + \Delta E_5 \end{cases} \qquad (268)$$

Те альтернативы x^*, при которых достигается оптимальное значение последнего по важности целевого критерия (в рассмотренном примере таким критерием является E_3), и являются решением исходной задачи многокритериальной оптимизации по методу последовательных уступок.

4.6. Принцип гарантированного результата

Ситуационная неопределённость характеризуется непредсказуемыми действиями неконтролируемых факторов различного происхождения: деятельность человека, стихийные бедствия, воздействия ноосферы и так далее, которые вызывают непредсказуемое поведение исследуемой системы.

В частности, природная неопределённость возникает в результате случайных действий труднопрогнозируемых и трудноконтролируемых факторов природы: метеоусловий, климатических изменений и так далее.

Раскрытие ситуационной неопределённости реализуется в виде выбора оптимальной стратегии действий x в условиях, когда целевой критерий известен, но содержит обобщённый параметр неопределённости , который может существенно изменяться во времени.

Для решения исходной задачи рационально использовать подход, позволяющий получить достаточно обоснованную, хотя и одностороннюю оценку. Такой подход базируется на **принципе гарантированного результата**. Рассмотрим суть этого принципа [1].

Предположим, что нашей целью является максимизация целевого критерия:

$$E_\lambda x \to \max. \qquad (269)$$

Обобщённый параметр неопределённости λ может ухудшать наши возможности (выбор x) по улучшению значений целевого критерия. Очевидно, что для каждой заданной стратегии действий наихудшие условия (наихудшая ситуация) соответствуют значению целевого функционала:

$$v_*(x) = \min_\lambda E_\lambda x. \qquad (270)$$

Наилучший результат мы получим, максимизируя $v_*(x)$:

$$v_*(x) \to \max. \tag{271}$$

При решении этой задачи получим следующее значение целевого критерия:

$$E_* = \max_x \min_\lambda E_\lambda x. \tag{272}$$

Так как выбранная гарантирующая, то есть максиминная, стратегия x^* ориентирована на оптимизацию целевого функционала в наихудших условиях, гарантируется, что в любых других, более благоприятных, условиях значение целевого функционала, по крайней мере, не ухудшится. В этом и состоит суть принципа гарантированного результата.

Таким образом, выбор **гарантирующей стратегии** – это рациональный способ принятия решений.

Альтернативный подход к раскрытию ситуационной неопределённости основан на следующей идее. Если параметр неопределённости принимает дискретные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, то цель

$$E_\lambda x \to \max \tag{273}$$

становится эквивалентной решению многокритериальной задачи:

$$\begin{cases} E_{\lambda_1} x \to \max \\ E_{\lambda_2} x \to \max \\ \quad\vdots \\ E_{\lambda_N} x \to \max \end{cases}. \tag{274}$$

Таким образом, задачи принятия решений при наличии ситуационной неопределённости, в которых параметр, характеризующий неопределённость, случаен, имеет много общего с раскрытием целевой неопределённости.

Аналогичный подход может применяться и в задачах раскрытия информационной неопределённости.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение целевой, ситуационной и информационной неопределенности в задачах системного анализа.
2. Как связаны между собой цели максимизации и минимизации одного и того же скалярного критерия эффективности? Чем отличаются задачи безусловной оптимизации от задач условной оптимизации? Какие существуют виды ограничений в задачах условной оптимизации?
3. В чем состоит главная отличительная особенность задач многокритериальной (векторной) оптимизации в сравнении с задачами классической (однокритериальной) оптимизации?
4. Какие основные подходы применяются для раскрытия целевой неопределенности в задачах системного анализа?
5. Сформулируйте определение Парето-фронта. Чем множество Парето отличается от Парето-фронта? Являются ли оптимальными допустимые альтернативы, образующие множество Парето?
6. Назовите основные графические приемы визуализации Парето-фронта в задачах векторной оптимизации.
7. Какая идея лежит в основе методов свертки целевых критериев в задачах векторной оптимизации? В чем состоит основное отличие аддитивной свертки от мультипликативной?
8. В чем суть метода идеальной точки и метода главного критерия решения задач векторной оптимизации?
9. Какова основная идея метода последовательных уступок?
10. В чем суть принципа гарантированного результата?

Литература

1. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. Киев: Наукова думка, 2011. 729 с.
2. Методы оптимизации: Учеб. пособ. / И.В. Гребенникова. Екатеринбург: УрФУ, 2017. 148 с.
3. *Ногин В. Д.* Множество и принцип Парето: Учеб. пособ. СПб.: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2020. 100 с.

4. Исследование операций: теория и практика: учеб. пособ. / Сост.: С. В. Куркина. Ульяновск: УлГТУ, 2017. 87 с.
5. *Силкина Г.Ю.* Теория принятия решений и управление рисками. Модели конфликтов, неопределенности, риска: Учеб. пособ. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 72 с.

5. Метод анализа иерархий

5.1. Принцип иерархической декомпозиции и агрегирования

Анализ сложных систем разной природы и решение связанных с ними сложных междисциплинарных прикладных проблем техносферной безопасности, организационного управления, стратегического планирования и многих других невозможны без соответствующего упрощения.

Как показывает практика принятия решений в сложных системах, одним из эффективных путей рационального упрощения сложности возникающих проблемных ситуаций является применение принципа **декомпозиции** и **агрегирования**, который многими системными аналитиками рассматривается в качестве основного принципа практического решения сложных прикладных системных задач.

В большинстве случаев процесс декомпозиции той или иной сложной проблемы на составные части приводит нас к построению иерархической структуры, кратко называемой иерархией.

В качестве элементарного примера иерархии Томас Саати рассматривает полисы, то есть города-государства в средневековой Европе. Благосостояние полисов в те времена зависело в основном от силы и способностей их правителей, опирающихся на гражданское правительство и армию. Таким образом, проблема благосостояния полиса может быть представлена в виде упрощённой иерархической структуры (рис. 46).

В такой иерархии сельское хозяйство, торговля, численность населения и ремесла сгруппированы в одно множество или уровень, так как в этой модели они обладают свойствами наиболее фундаментальных факторов экономической силы полиса. Эти факторы определяют способность функционирования гражданского правительства и силу армии, которые, в свою очередь, влияют на благосостояние полиса [1].

Следуя Саати, отметим следующие замечания.

Во-первых, очевидно, что эта модель слишком проста. Здесь можно было бы определить намного больше элементов и больше уровней в зависимости от вопроса, на который мы пытаемся ответить. Модель быстро усложняется и становится трудновоспринимаемой. Поэтому

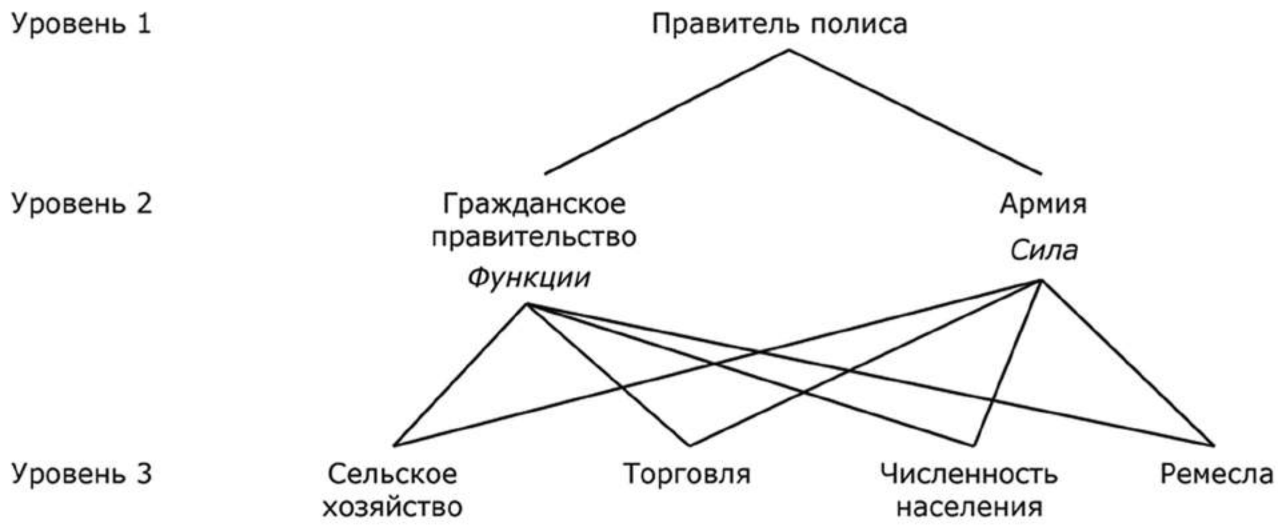


Рис. 46. Упрощенное иерархическое представление проблемы благосостояния полиса

следует тщательно строить иерархию с учетом соответствия действительности и нашего понимания ситуации. Опыт иерархического представления системных проблем показывает, что даже весьма грубая на вид идеализация может позволить глубже вникнуть в суть проблемы.

Во-вторых, в эту модель не включен тот очевидный факт, что не только торговля влияет на гражданское правительство, но и гражданское правительство также воздействует на торговлю. Это «реверсивное» воздействие или обратная связь, будучи зачастую важным, все же не так существенно, как это может показаться вначале. Анализ нескольких системных задач, проведенный Саати сначала без учета обратной связи, а затем с ее учетом, показал, что во многих случаях результаты были достаточно близкими, и это позволяет допустить, что правильно построенная иерархия в большинстве случаев будет адекватной моделью реальности, даже если возможные обратные связи игнорируются.

Тем не менее, как показывает первый пример этого раздела, некоторые ситуации могут быть настолько сложными, что их представление в виде иерархии окажется упрощенным, вводящим в заблуждение.

Несмотря на известное, интуитивно понятное, представление об иерархиях как о древовидных структурах, для корректного понимания дальнейшего изложения нам понадобится, хотя бы в общих чертах, скорректировать такое представление, немного уточнив понятие иерархии.

Определение иерархии. Любую **иерархию**, точнее – **иерархическую структуру**, мы будем представлять геометрически **ориентированным графом**, удовлетворяющим четырём требованиям:

1. На верхнем уровне находится лишь одна **корневая вершина**, которую в прикладных задачах интерпретируют как **главную стратегическую цель**.

2. На каждом последующем, нижележащем уровне находятся не связанные между собой вершины, называемые **альтернативами** этого уровня, причём каждая альтернатива (за исключением альтернатив нижнего уровня) служит **целевым критерием** для альтернатив непосредственно нижележащего уровня иерархии.

3. Связи в иерархических структурах представлены рёбрами, направленными от **каждого** элемента каждого уровня, кроме верхнего, **хотя бы к одному** элементу **непосредственно вышестоящего** уровня иерархии.

4. Отсутствие обратных связей (ацикличность графа иерархической структуры).

Таким образом, **все связи в иерархии направлены снизу вверх**. Полезно отметить, что выбор именно такого направления, несмотря на некоторые кажущиеся неудобства, существенно упрощает понимание дальнейшего изложения и является общепринятым во многих приложениях, в частности, в объектно-ориентированном программировании.

В прикладных задачах многокритериального выбора исследователи, как правило, имеют дело с **полными иерархиями**, в которых каждый элемент конкретного уровня, за исключением верхнего, оказывает влияние на **все** элементы вышестоящего непосредственно над ним уровня иерархии. **Неполные** иерархические структуры в теории допустимы, но на практике используются реже.

На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию или даже в более общую систему. Это зависит от тех целей, которые мы выбираем для декомпозиции сложной системы. Обычно эта процедура начинается с изучения литературы для обогащения мыслями, и часто, знакомясь с чужими работами, мы как бы проходим через стадию мозгового штурма для составления перечня всех концепций, существенных для задачи, независимо от их соотношения или порядка. Следует помнить, что основные цели устанавливаются на вершине иерархии; их подцели – непосредственно ниже вершины; силы, ограничивающие акторов (агентов), – еще ниже. Силы доминируют над уровнем самих акторов (агентов), которые, в свою очередь, доминируют над уровнем своих целей, ниже которых будет уровень их возможных действий, и в самом низу находится уровень различных возможных исходов (сценариев). Это естественная форма, которую принимают иерархии, связанные с планированием и конфликтами. В иерархии, предназначенной для физической системы, возможные действия могут быть заменены методами конструирования. За ними должно следовать несколько промежуточных уровней. Прежде чем будет сформирован хорошо определенный план, могут потребоваться значительные критические замечания и перепроверки.

Существует достаточное сходство между проблемами, так что мы не всегда сталкиваемся с совершенно новой задачей при построении иерархии. Задачей для опытного исследователя в некотором смысле становится отождествление различных классов проблем, возникающих в реальных системах. Существует такое разнообразие этих систем, что исследователю необходимо знание идей и концепций, которыми оперируют специалисты. Это требует интеллекта, терпения и способности взаимодействовать с другими людьми, чтобы извлечь выгоду из их опыта и знаний.

Наше чувственное восприятие действует специфически, а именно: служит потребностям выживания. Поэтому, хотя мы и стараемся быть объективными при интерпретации опыта, наша способность понимать и абстрагировать очень субъективна и обычно служит нашим нуждам! Выживание, по-видимому, является основой для выработки целей.

В действительности то, что мы подразумеваем под «объективностью», есть разделённая субъективность. Поэтому формируемые нами иерархии объективны в соответствии с нашим собственным определением, так как они отражают коллективный опыт. Важным замечанием при иерархическом подходе к решению задач является то, что функциональное воспроизведение системы может быть различным у разных лиц, однако люди обычно приходят к согласию по нижнему уровню альтернативных действий, которые нужно предпринимать, и по следующему за ним уровню характеристик этих действий.

Например, нижний уровень может состоять из различных маршрутов движения транспорта между двумя пунктами, а уровень характеристик может включать время следования, сужения, выбоины, безопасность и т. д.

В табл. 19 показаны уровни иерархий различных типов, однако лицо, формирующее иерархию, должно быть уверенным в том, что уровни естественно связаны друг с другом. При необходимости уровень может быть разбит на два уровня и более или совершенно удален [1].

Таблица 19

Общие рекомендации по иерархической декомпозиции анализируемых проблем

Общая иерархия системы	Ограничения и силы окружающей среды	Перспектива (акторы)	Цели акторов	Возможные действия	Исходы	Результирующий исход
Иерархия для конфликта	Ограничения	Акторы	Цель	Возможные действия	Исходы	Компромисс или устойчивый исход
Прямое или проектируемое планирование	Возможные организационные действия в настоящее время	Другие акторы	Цели других акторов	Возможные действия	Сценарии	Логическое будущее
Обратное или идеализированное планирование	Ответные возможные организационные действия	Другие акторы	Цели других акторов	Возможные действия других акторов	Сценарии	Желательное будущее
Анализ стоимость – эффективность	Критерии	Подкритерии	Цели	Возможные действия	Выборы	Лучший выбор или смесь
Выбор капиталовложений	Уровень риска	Основные силы	Критерии	Сферы задач	Характерные проекты	
Прогнозирование	Уровень риска	Основные силы	Критерии	Сферы задач	Категории	

Рассмотрим **модельный пример иерархической структуры проблемы многокритериального выбора** (рис. 47).

Рис. 47. Пример полной иерархической структуры проблемы многокритериального выбора

На первом (верхнем) уровне рассматриваемой в этом примере иерархии находится главная цель – достижение эффективности («Э») какого-либо процесса. Альтернативы второго уровня иерархии представлены тремя критериями эффективности: «К1», «К2» и «К3». Наконец, альтернативами третьего (нижнего) уровня иерархии являются два мероприятия: «М1» и «М2».

Временно предположим известными локальные приоритеты важности мероприятий относительно критериев эффективности (табл. 20) и приоритеты важности критериев достижения главной цели (табл. 21).

Таблица 20

Локальные приоритеты важности мероприятий относительно критериев эффективности

Альтернативы	Критерий «К1»	Критерий «К2»	Критерий «К3»
Мероприятие «М1»	v_{M1}^{K1}	v_{M1}^{K2}	v_{M1}^{K3}
Мероприятие «М2»	v_{M2}^{K1}	v_{M2}^{K2}	v_{M2}^{K3}

Традиционно локальные приоритеты важности представляют собой числа, лежащие в диапазоне от нуля до единицы.

Таблица 21

Локальные приоритеты важности критериев достижения главной цели

Альтернативы	Эффективность «Э»
Критерий «К1»	$v_{K1}^{Э}$
Критерий «К2»	$v_{K2}^{Э}$
Критерий «К3»	$v_{K3}^{Э}$

Таким образом, локальные приоритеты важности можно интерпретировать как **маркёры мощности (интенсивности)** соответствующей направленной связи, присутствующей в иерархической структуре. Такой подход позволяет анализировать не только **полные**, но и **неполные** иерархии, поскольку **связям, отсутствующим в иерархии**, приписывается **нулевой локальный приоритет важности** в соответствующей ячейке таблицы локальных приоритетов важности.

Глобальные приоритеты важности характеризуют мощность (интенсивность) опосредованного вклада альтернатив нижнего уровня иерархии в достижение главной цели.

Без ограничения общности изложения локальные приоритеты важности **можно считать безразмерными** величинами. В самом деле, каждый столбец табл. 1 и табл. 2 может быть нормирован путём деления каждого его элемента на сумму элементов этого столбца.

Более того, возможность применения указанной нормировки позволяет считать столбцы **нормированными** априори в том смысле, что сумма значений компонент каждого столбца после указанной нормировки окажется равной единице, что очень удобно с точки зрения интеграции метода анализа иерархий в методы теории вероятностей.

По сути табл. 1 является матрицей нечёткого бинарного отношения[4] R_M^K, действующего из множества мероприятий M в множество критериев оценки их эффективности:

$$M \xrightarrow{R_M^K} K;$$

$$M = \{ M1, M\} \qquad K = \{ K1, K2, K3\}.$$

То есть элементы табл. 1 определяют интенсивность (мощность) соответствующих связей элементов нижнего (третьего) уровня иерархии относительно элементов её второго уровня.

Аналогично, табл. 2 представляет собой матрицу нечёткого бинарного отношения[5], действующего из множества критериев в одноэлементное множество – корневую вершину иерархии, то есть:

$$K \xrightarrow{R_K^E} E;$$

$$K = \{ K1, K2, K3\} \quad E = \{Э\}.$$

То есть элементы табл. 2 определяют интенсивность (мощность) соответствующих связей элементов второго уровня иерархии относительно единственного элемента её первого уровня.

[4] Замечено автором пособия.

[5] То же.

Итак, для третьего уровня рассматриваемой иерархии вектор-столбцы локальных приоритетов мероприятий относительно критериев можно объединить в **матрицу локальных приоритетов**:

$$R_M^K = \begin{pmatrix} v_{M1}^{K1} & v_{M1}^{K2} & v_{M1}^{K3} \\ v_{M2}^{K1} & v_{M2}^{K2} & v_{M2}^{K3} \end{pmatrix}. \tag{275}$$

Аналогично, вектор приоритетов важности критериев достижения главной цели имеет вид:

$$R_K^E = \begin{pmatrix} v_{K1}^{Э} \\ v_{K2}^{Э} \\ v_{K3}^{Э} \end{pmatrix}. \tag{276}$$

Агрегирование, то есть синтез глобальных приоритетов альтернатив нижнего уровня иерархии относительно главной цели верхнего уровня, осуществляется путём суперпозиции соответствующих нечётких отношений[6]:

$$R_M^E = R_M^K R_K^E. \tag{277}$$

То есть:

$$R_M^E = \begin{pmatrix} v_{M1}^{K1} & v_{M1}^{K2} & v_{M1}^{K3} \\ v_{M2}^{K1} & v_{M2}^{K2} & v_{M2}^{K3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{K1}^{Э} \\ v_{K2}^{Э} \\ v_{K3}^{Э} \end{pmatrix} = \tag{278}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{M1}^{K1} v_{K1}^{Э} + v_{M1}^{K2} v_{K2}^{Э} + v_{M1}^{K3} v_{K3}^{Э} \\ v_{M2}^{K1} v_{K1}^{Э} + v_{M2}^{K2} v_{K2}^{Э} + v_{M2}^{K3} v_{K3}^{Э} \end{pmatrix}.$$

В МАИ матричное умножение реализуется в общепринятом алгебраическом смысле.

[6] Замечено автором пособия.

Заметим, что, в силу свойств матричного умножения, имеет место следующее равенство:

$$R_M^E = v_{K1}^{Э}\begin{pmatrix} v_{M1}^{K1} \\ v_{M2}^{K1} \end{pmatrix} + v_{K2}^{Э}\begin{pmatrix} v_{M1}^{K2} \\ v_{M2}^{K2} \end{pmatrix} + v_{K3}^{Э}\begin{pmatrix} v_{M1}^{K3} \\ v_{M2}^{K3} \end{pmatrix}. \qquad (279)$$

Отсюда ясно, что, если сумма компонент каждого вектор-столбца, стоящего в правой части этого равенства, равна единице, то сумма компонент полученного вектора глобальных приоритетов $V_{\text{М}}^{\text{Э}}$ в левой части этого равенства окажется равной сумме компонент вектора $V_{\text{К}}^{\text{Э}}$, которая при распространении требования нормировки и на этот вектор, в свою очередь, окажется равной единице.

Таким образом, **при выполнении требования нормировки** к столбцам исходных таблиц, **нормированность** получаемого **вектора глобальных приоритетов гарантируется**, благодаря чему **приоритет главной цели, находящейся на верхнем уровне иерархии, оказывается равным единице**.

В принципе, идея синтеза глобальных приоритетов путём суперпозиции вполне аналогична идее расчёта композиции соответствующих нечётких отношений, за тем лишь исключением, что в методе анализа иерархий матрицы перемножаются стандартным, то есть алгебраическим способом.

Альтернативный способ агрегирования состоит в произвольном упорядочивании всех вершин иерархической структуры и построении полной матрицы локальных приоритетов для всей иерархии. Для рассматриваемого примера полная матрица локальных приоритетов представлена в табл. 22.

Таблица 22

Матрица локальных приоритетов

	Э	**К1**	**К2**	**К3**	**М1**	**М2**
Э	0	0	0	0	0	0
К1	$v_{K1}^{Э}$	0	0	0	0	0
К2	$v_{K2}^{Э}$	0	0	0	0	0
К3	$v_{K3}^{Э}$	0	0	0	0	0
М1	0	v_{M1}^{K1}	v_{M1}^{K2}	v_{M1}^{K3}	0	0
М2	0	v_{M2}^{K1}	v_{M2}^{K2}	v_{M2}^{K3}	0	0

Далее полученная матрица последовательно возводится в натуральную степень до получения нулевой матрицы. Квадрат матрицы локальных приоритетов определяет возможные пути длины два и для рассматриваемой в этом примере иерархии представлен в табл. 23.

Таблица 23

Квадрат матрицы локальных приоритетов

	Э	К1	К2	К3	М1	М2
Э	0	0	0	0	0	0
К1	0	0	0	0	0	0
К2	0	0	0	0	0	0
К3	0	0	0	0	0	0
М1	$v_{M1}^{K1} v_{K1}^{Э} + v_{M1}^{K2} v_{K2}^{Э} + v_{M1}^{K3} v_{K3}^{Э}$	0	0	0	0	0
М2	$v_{M2}^{K1} v_{K1}^{Э} + v_{M2}^{K2} v_{K2}^{Э} + v_{M2}^{K3} v_{K3}^{Э}$	0	0	0	0	0

При этом возведение матрицы в куб даст нулевую матрицу, что неудивительно, так как путей длины три в рассматриваемой иерархии не существует.

Как видим, результаты, полученные этим способом, совпадают с полученными выше.

Описанный способ синтеза глобальных приоритетов является более общим, так как его применение возможно не только для анализа систем иерархической структуры, но и для сложных систем произвольной сетевой структуры, в частности, систем с контурами обратной связи.

Впрочем, для систем со структурой, отличной от иерархической, сходимость гарантируется далеко не всегда, что связано с возможной неустойчивостью матрицы локальных приоритетов.

Рассмотренный пример показывает нам, как синтезировать глобальные приоритеты важности альтернатив нижнего уровня иерархии относительно их влияния на главную цель в условиях априори известных локальных приоритетов важности альтернатив каждого уровня иерархии относительно их вклада в достижение цели каждой вершины непосредственно вышележащего уровня.

Однако в прикладных задачах локальные приоритеты альтернатив часто априори не известны, но, несмотря на это, они могут быть определены косвенно – путём предварительного их **парного сравнения** относительно цели той непосредственно вышестоящей вершины, на которую сравниваемые альтернативы оказывают непосредственное влияние в иерархии.

В целях реализации этой идеи Томасом Саати был разработан **метод анализа иерархий** (МАИ), к рассмотрению которого мы и переходим.

5.2. Теоретические основы метода анализа иерархий

Пусть альтернативам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданного конечного множества X приписан некоторый условный **положительный вес** $v_1, v_2, \ldots, v_n$, соответственно.

Например, в качестве альтернатив рассматриваются камешки, а весом каждого камешка является его масса. В роли веса также может рассматриваться объём камешка либо какой-нибудь другой параметр, принимающий лишь положительные значения.

Соберём веса всех рассматриваемых альтернатив в единый **весовой вектор**:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{280}$$

Составим квадратную **матрицу отношений весов** следующим образом:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{281}$$

где

$$a_{ij} = \frac{v_i}{v_j}. \tag{282}$$

Очевидно, построенная таким путём матрица A состоит лишь из **положительных** элементов и, помимо этого, обладает тремя важными свойствами [1].

Свойство 1. **Обратная симметричность:**

$$a_{ij}a_{ji} = 1. \tag{283}$$

Свойство 2. **Единичность элементов главной диагонали:**

$$a_{ii} = 1. \tag{284}$$

Свойство 3. **Согласованность:**

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij}. \tag{285}$$

Во избежание возможных недоразумений отметим, что во всех рассматриваемых равенствах индексы i, j, k здесь и далее принимают любые натуральные значения в диапазоне от 1 до n.

Заметим также, что, в силу данного выше определения элементов матрицы A, имеем:

$$a_{ij}v_j = v_i. \tag{286}$$

Применим оператор суммирования по индексу j к левой и правой части этого уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} v_i. \tag{287}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = nv_i. \tag{288}$$

Отметим, что последнее уравнение можно записать для любого натурального значения индекса i, изменяющегося в диапазоне от 1 до n. Поэтому фактически мы получили систему, состоящую из n линейных уравнений, которая в развёрнутой форме записи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n = nv_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n = nv_2 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n = nv_n \end{cases}. \tag{289}$$

В свою очередь, вспоминая известное из курса высшей математики определение умножения матриц, мы видим, что полученную систему линейных уравнений можно представить в более компактной форме – единым векторно-матричным уравнением:

$$Av = nv. \tag{290}$$

Напомним теперь известное в курсе высшей математики **определение собственного числа и собственного вектора** матрицы.

Пусть A – заданная произвольная квадратная матрица, а v – **ненулевой** вектор, удовлетворяющий векторно-матричному уравнению:

$$Av = \lambda v, \tag{291}$$

где λ – некоторый скаляр, то есть число.

Тогда скаляр λ называют **собственным числом** матрицы A, а вектор v – **собственным вектором** матрицы A, соответствующим её собственному числу λ.

Учитывая, что определённый в самом начале наших рассуждений весовой вектор v в принципе не может быть ненулевым, мы видим, что вектор является собственным вектором матрицы A и соответствует её собственному числу n.

Таким образом, мы доказали, что вектор-столбец, составленный из априори известных положительных весов рассматриваемых n альтернатив, обладает фундаментальным свойством: он является собственным вектором матрицы парных отношений весов и соответствует её собственному числу n, равному количеству альтернатив.

Кроме того, попутно мы обратили внимание на такие фундаментальные свойства матрицы парных отношений априори известных весов, как: её обратная симметричность, единичность элементов её главной диагонали и согласованность.

5.3. Практическая реализация метода анализа иерархий

Реализация метода анализа иерархий предполагает рассмотрение **обратной задачи**.

Пусть веса альтернатив априори не известны, но известна **матрица парных сравнений**, которая заполняется экспертом путём попарного сравнения альтернатив. Результатом такого сравнения является число – элемент a_{ij} матрицы парных сравнений A, отражающий **степень важности**, то есть субъективную меру относительного превосходства (доминирования) альтернативы x_i над альтернативной x_j с точки зрения удовлетворения некоторому, априори заданному, **целевому критерию**. Зная матрицу парных сравнений, необходимо определить **локальные приоритеты важности**, то есть веса рассматриваемых альтернатив относительно заданного целевого критерия.

При этом вполне логично ожидать от матрицы A парных сравнений выполнения таких свойств, как **положительность её элементов** и **обратная симметричность**, а, следовательно, и **единичность элементов её главной диагонали**. Более того, в случае идеально согласованных суждений эксперта построенная матрица окажется согласованной.

Однако **в реальности согласованности матрицы парных сравнений ожидать не следует**. В связи с этим для решения поставленной задачи поиска локальных приоритетов альтернатив по известной матрице их парных сравнений приведём два полезных факта из теории матриц [1].

Факт 1. Все собственные числа положительной согласованной обратно-симметричной матрицы – нули, за исключением одного единственного, равного n. То есть в случае согласованности n есть наибольшее собственное число матрицы A.

Факт 2. Если элементы положительной обратно-симметричной матрицы незначительно изменить, то её собственные значения также изменятся незначительно. То есть имеет место устойчивость собственных значений положительной обратно-симметричной матрицы по отношению к малым возмущениям её элементов.

Таким образом, искомый **вектор локальных приоритетов** альтернатив относительно выбранного критерия их парного сравнения следует определять как **главный собственный вектор** матрицы парных сравнений, то есть как собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному числу λ_{max} матрицы A:

$$Av = \lambda_{max} v. \tag{292}$$

Однако, как известно, любой собственный вектор определён с точностью до умножения на произвольный ненулевой скаляр. Поэтому в целях обеспечения **единственности** найденный главный собственный вектор нормируют путём деления на сумму его компонент и получают вектор локальных приоритетов, сумма компонент которого равна единице.

Парные сравнения. Матрица парных сравнений является квадратной обратно-симметричной матрицей, имеющей структуру, соответствующую табл. 24.

Таблица 24

Структура матрицы парных сравнений альтернатив

	Альтернатива 1	**Альтернатива 2**	**…**	**Альтернатива *n***
Альтернатива 1	1	a_12	…	a_1n
Альтернатива 2	a_21	1	…	a_2n
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
Альтернатива *n*	a_{n1}	a_{n2}	…	1

Эксперт соответствующей предметной области, основываясь на собственном опыте, знаниях и интуиции, осуществляет попарное сравнение альтернатив относительно заданного критерия:

a_{ji} **– мера относительного превосходства** (доминирования) альтернативы i над альтернативой j с точки зрения критерия их сравнения, то есть **полезности** для цели той вершины, с которой рассматриваемые альтернативы связаны направленными рёбрами в иерархии.

Эксперт заполняет лишь элементы, расположенные над главной диагональю, состоящей из единиц, в то время как элементы матрицы под главной диагональю рассчитываются по формуле:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}. \tag{293}$$

Поэтому **количество парных сравнений**, выполняемых экспертом, очевидно, равно количеству элементов, расположенных над главной диагональю матрицы парных сравнений:

$$N_{\text{сравнений}} = \frac{n^2 - n}{2}. \qquad (294)$$

При этом **на каждом уровне иерархии строится столько матриц парных сравнений, сколько элементов содержит предшествующий уровень иерархии** (в каждой матрице – результаты сравнения по одному из критериев непосредственно вышестоящего уровня).

В процессе осуществления парных сравнений рекомендуется пользоваться **фундаментальной шкалой предпочтений (шкалой относительной важности)**, приведенной в табл. 25.

Таблица 25

Фундаментальная шкала предпочтений (шкала относительной важности)

Степень важности	Определение	Объяснение
1	Эквивалентность – одинаковая значимость сравниваемых альтернатив	Две альтернативы вносят одинаковый вклад в достижение цели – критерия сравнения
3	Слабая значимость – некоторое преобладание значимости одной альтернативы над другой	Опыт и суждение дают лёгкое предпочтение одной альтернативе перед другой
5	Существенная или сильная значимость одной альтернативы над другой	Опыт и суждение дают сильное предпочтение одной альтернативе перед другой
7	Очень сильная или очевидная значимость одной альтернативы над другой	Предпочтение одной альтернативы перед другой очень сильно – её превосходство практически явно
9	Абсолютная значимость одной альтернативы над другой	Свидетельство в пользу выбора одной альтернативы или другой в высшей степени предпочтительно

Степень важности	Определение	Объяснение
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними значениями шкалы	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведённых выше чисел	Если альтернативе *i* при сравнении с альтернативой *j* приписывается одно из приведённых выше чисел, то альтернативе *j* при сравнении с *i* приписывается обратное значение	Обоснованное предположение обратной симметричности
Рациональные значения как отношения приведённых выше чисел	Отношения, возникающие в заданной шкале	Если постулировать согласованность, то для получения матрицы требуется n числовых значений

Далее, для заполненной матрицы парных сравнений необходимо отыскать вектор локальных приоритетов, то есть главный собственный вектор, удовлетворяющий следующим требованиям [1]:

$$Av = \lambda v. \tag{295}$$

$$\lambda \to \max \qquad \Sigma v_i = 1. \tag{296}$$

При наличии специального программного обеспечения, например, MATLAB, решение задачи нахождения локального вектора приоритетов по построенной матрице парных сравнений не представляет трудности. В случае отсутствия необходимого программного обеспечения необходимо прибегнуть к приближённому решению задачи.

Приближённая оценка локальных приоритетов. Грубые оценки вектора локальных приоритетов можно получить следующими четырьмя способами, которые представлены ниже в порядке увеличения точности оценки.

Способ 1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов матрицы; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д

Способ 2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, то есть разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

Способ 3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца, то есть нормализовать столбцы; затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

Способ 4. Перемножить элементы каждой строки и извлечь корень n-й степени, то есть вычислить среднее геометрическое для каждой строки. Затем нормализовать полученные числа.

5.4. Оценка степени согласованности суждений эксперта

После получения приближённой оценки локального вектора приоритетов $\tilde{v}$ следует вычислить приближённую оценку максимального собственного числа $\lambda_{\max}$ матрицы парных сравнений по формуле:

$$\lambda_{\max} \approx s\tilde{v}, \qquad (297)$$

где s – ковектор, то есть вектор-строка, составленная из сумм элементов столбцов матрицы A.

Известно, что согласованность положительной обратно-симметричной матрицы эквивалентна требованию равенства ее максимального собственного числа $\lambda_{\max}cn$.

Для обратно-симметрических матриц первого и второго порядка эти параметры совпадают с 1 и 2, соответственно, то есть согласованность в этих частных случаях гарантируется.

В общем же случае, при n > 2 имеет место нестрогое неравенство:

$$\lambda_{\max} \geq n, \qquad (298)$$

где n – порядок матрицы.

Чем ближе это неравенство к равенству, тем более согласованными являются суждения эксперта. В связи с этим, Томасом Саати, создателем МАИ, были предложены следующие определения.

Индекс согласованности (ИС) суждений эксперта определяют по формуле:

$$ИС_{(A)} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}. \qquad (299)$$

Случайная согласованность (СС) есть среднестатистическое значение ИС для обратно-симметричных положительных матриц, сгенерированных случайным образом, в соответствии с рассматриваемой в табл. 3 фундаментальной шкалой парных сравнений:

$$СС_n = ИС_{(A)} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}. \qquad (300)$$

На рис. 48 представлена диаграмма, иллюстрирующая статистически монотонно возрастающий характер зависимости случайной согласованности от порядка n.

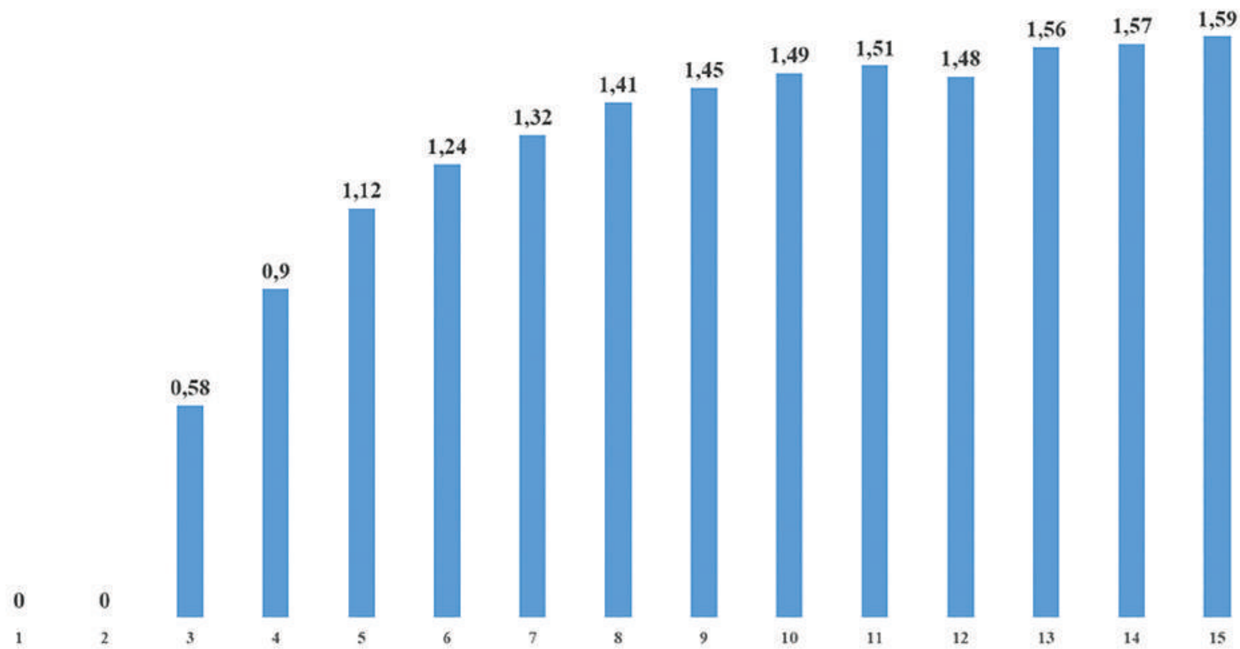


Рис. 48. Диаграмма зависимости случайной согласованности от порядка матрицы

Отношение согласованности (ОС) есть отношение:

$$OC_{(A)} = \frac{ИС_{(A)}}{СС_n}, \tag{301}$$

определено для матриц порядка $n > 2$, в то время как для обратно-симметрических матриц первого и второго порядка согласованность имеет место априори.

Приемлемой в МАИ считается ситуация, при которой выполняется неравенство:

$$OC_{(A)} \le 0{,}1. \tag{302}$$

В противном случае следует утверждается рассогласование суждений эксперта и рекомендуется повторное заполнение матрицы парных сравнений с учётом более внимательного использования фундаментальной шкалы относительной важности, представленной выше в табл. 6.

Таким образом, **алгоритм МАИ** включает в себя следующие шаги:

Шаг 1. Иерархическая декомпозиция главной цели для рассматриваемой проблемы.

Шаг 2. Последовательные парные сравнения экспертом альтернатив каждого уровня иерархии относительно цели каждой вершины непосредственно вышестоящего уровня.

Шаг 3. Расчет локальных векторов приоритетов.

Шаг 4. Проверка согласованности (непротиворечивости) оценок эксперта.

Шаг 5. Агрегирование (синтез) глобальных приоритетов важности альтернатив нижнего уровня иерархии с точки зрения их опосредованного вклада в достижение главной цели верхнего уровня.

Обобщением МАИ является **метод Делфи**, в котором опрашивается группа экспертов, а также **метод аналитических сетей** (МАС), применяемый для анализа сложных прикладных проблем, возникающих в системах с **обратными связями** [1, 2, 3].

Однако, в силу повышенной математической сложности, изложение этого метода выходит за рамки нашего курса.

5.5. Пример применения метода анализа иерархий

Проблема выбора школы. В своё время Томас Саати, будучи автором МАИ, провёл системный анализ проблемы выбора альтернатив: трёх школ A, B и C на предмет их желательности с точки зрения своего сына [1]; причём для сравнения школ было выбрано 6 независимых критериев: учеба, друзья, школьная жизнь, профессиональное обучение, подготовка к колледжу и обучение музыке. Соответствующая иерархия приведена на рис. 49.

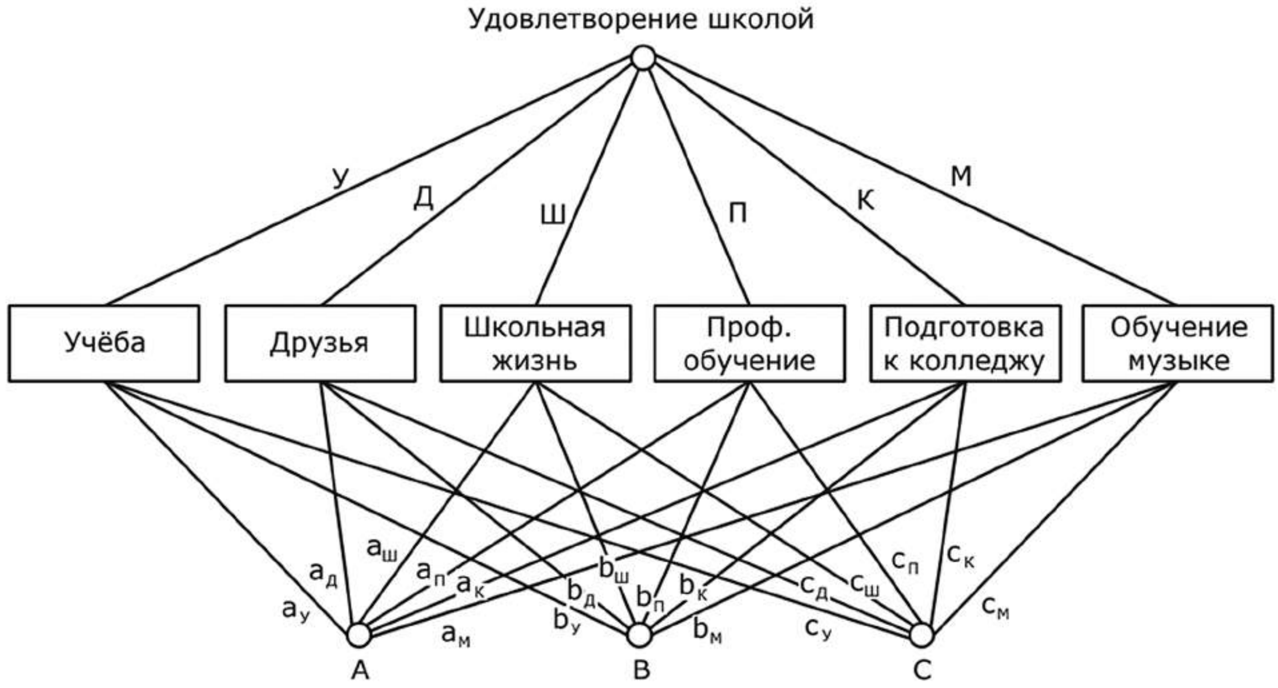


Рис. 49. Иерархия удовлетворения школой

Для получения обшей оценки каждой школы нужно, во-первых, умножить вес оценки этой школы по некоторому критерию на вес этого критерия. Затем следует сложить значения, полученные для каждой школы по всем критериям. Таким образом, результирующая интегральная оценка (эффективность) каждой школы вычисляется по следующим формулам:

$$E_A = \text{a}_\text{у}\text{У} + \text{a}_\text{Д}\text{Д} + \text{a}_\text{Ш}\text{Ш} + \text{a}_\text{П}\text{П} + \text{a}_\text{К}\text{К} + \text{a}_\text{М}\text{М};$$

$$E_B = b_\text{у}\text{У} + b_\text{Д}\text{Д} + b_\text{Ш}\text{Ш} + b_\text{П}\text{П} + b_\text{К}\text{К} + b_\text{М}\text{М};$$

$$E_C = c_\text{у}\text{У} + c_\text{Д}\text{Д} + c_\text{Ш}\text{Ш} + c_\text{П}\text{П} + c_\text{К}\text{К} + c_\text{М}\text{М}.$$

Заметим, что каждое слагаемое в этих формулах формально представляет собой не что иное как путь длины 2 из соответствующей вершины – конкретной школы, являющейся альтернативой нижнего уровня графа рассматриваемой иерархии, в корневую (целевую) вершину иерархии.

Нетрудно убедиться в возможности представления указанных выше трёх формул в виде единого векторного равенства:

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{pmatrix} = У\begin{pmatrix} a_У \\ b_У \\ c_У \end{pmatrix} + Д\begin{pmatrix} a_Д \\ b_Д \\ c_Д \end{pmatrix} + Ш\begin{pmatrix} a_Ш \\ b_Ш \\ c_Ш \end{pmatrix} + П\begin{pmatrix} a_П \\ b_П \\ c_П \end{pmatrix} + К\begin{pmatrix} a_К \\ b_К \\ c_К \end{pmatrix} + М\begin{pmatrix} a_М \\ b_М \\ c_М \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, это векторное равенство (линейную комбинацию вектор-столбцов локальных приоритетов), можно представить как результат следующего матричного умножения:

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_У & a_Д & a_Ш & a_П & a_К & a_М \\ b_У & b_Д & b_Ш & b_П & b_К & b_М \\ c_У & c_Д & c_Ш & c_П & c_К & c_М \end{pmatrix} \begin{pmatrix} У \\ Д \\ Ш \\ П \\ К \\ М \end{pmatrix}.$$

Эта формула соответствует композиции двух нечётких отношений, первое из которых действует из множества школ в множество критериев их сравнения, а второе действует из множества критериев сравнения школ в одноточечное множество, представленное целевой вершиной иерархии:

Альтернативы → Критерии → Цель.

Однако следует помнить, что в контексте МАИ матричное умножение реализуется не в максиминном, а в общепринятом алгебраическом смысле.

Для определения значений элементов матриц этих нечётких отношений, характеризующих силу соответствующих связей в иерархии, воспользуемся соответствующими результатами парных сравнений.

Результаты парного сравнения школ относительно каждого критерия представлены в виде следующих матриц:

Учёба	A	B	C
A	1	1/3	1/2
B	3	1	3
C	2	1/3	1

$\lambda_{\max} = 3{,}05$

$ИС = 0{,}025$

$ОС = 0{,}04$

Друзья	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	1	1	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Школьная жизнь	A	B	C
A	1	5	1
B	1/5	1	1/5
C	1	5	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Проф. обучение	A	B	C
A	1	9	7
B	1/9	1	1/5
C	1/7	5	1

$\lambda_{\max} = 3{,}21$

$ИС = 0{,}105$

$ОС = 0{,}18$

Подготовка к колледжу	A	B	C
A	1	1/2	1
B	2	1	2
C	1	1/2	1

$\lambda_{\max} = 3{,}00$

$ИС = 0$

$ОС = 0$

Обучение музыке	A	B	C
A	1	6	4
B	1/6	1	1/3
C	1/4	3	1

$\lambda_{\max} = 3{,}05$

$ИС = 0{,}025$

$ОС = 0{,}04$

Главные собственные векторы локальных приоритетов школ относительно каждого критерия соответствуют столбцам матрицы.

Результаты парного сравнения критериев относительно общего удовлетворения школой представлены следующей матрицей:

	Учёба	Друзья	Школьная жизнь	Проф. обучение	Подготовка к колледжу	Обучение музыке
Учёба	1	4	3	1	3	4
Друзья	1/4	1	7	3	1/5	1
Школьная жизнь	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
Проф. обучение	1	1/3	5	1	1	1/3
Подготовка к колледжу	1/3	5	5	1	1	3
Обучение музыке	1/4	1	6	3	1/3	1

$\lambda_{\max} = 7{,}49$; $ИС = 0{,}30$; $ОС = 0{,}24$

Максимальное собственное значение достаточно далеко от случая согласованности, когда в идеале оно равно 6; ИС = 0,30 и ОС = 0,30/1,24 = = 0,24, что также достаточно велико.

Главный собственный вектор приоритетов критериев сравнения относительно верхней цели иерархии имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} У \\ Д \\ Ш \\ П \\ К \\ М \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,14 \\ 0,03 \\ 0,13 \\ 0,24 \\ 0,14 \end{pmatrix}.$$

В результате матричного умножения был определен вектор глобальных приоритетов школ:

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,38 \\ 0,25 \end{pmatrix}.$$

Эти приоритеты определяют строгий порядок ранжирования школ:

$$C \prec A \prec B.$$

Таким образом, наилучшей (оптимальной) альтернативой с точки зрения респондента является выбор школы B.

Тем не менее, сын автора МАИ поступил в школу А, так как она получила почти такую же оценку, что и школа В, и была бесплатной, а школа В была частной, за обучение в ней нужно было платить около 1600 долл. в год.

Это было проблемой конфликта между сыном и женой автора; первый отдал предпочтение школе В, а вторая – школе А.

К счастью, по достижении совершеннолетнего возраста, интерес респондента к колледжу и музыке стал насущной потребностью, а не отдалёнными стремлениями. Автор МАИ отмечает, что согласованность также существенно повысилась. Приоритеты школ относительно характеристик получились теми же, что и раньше, и ретроспективно стало намного яснее, что тогда был сделан правильный выбор.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение многоуровневой иерархической структуры. Какие математические методы системного анализа обобщают метод анализа иерархий?

2. Приведите примеры иерархического представления сложных систем разной природы и проблемных ситуаций. Чем сеть отличается от иерархии? Чем полная иерархия отличается от неполной?

3. Какими тремя основными свойствами обладает матрица парных отношений априори известных положительных весов заданных альтернатив?

4. Сформулируйте определение собственного числа и собственного вектора произвольной квадратной матрицы. Однозначно ли определяется собственный вектор, соответствующий конкретному собственному числу?

5. Какую структуру имеет матрица парных сравнений? Как связано количество парных сравнений, выполняемых экспертом в методе анализа иерархий, с порядком матрицы парных сравнений?

6. В чем сходство и различие в свойствах матриц парных сравнений альтернатив с априори неизвестными весами и соответствующих им матриц парных отношений априори известных весов?

7. Какой шкалой рекомендует пользоваться Саати в методе анализа иерархий при построении парных сравнений альтернатив?

8. Как в методе анализа иерархий определяется вектор локальных приоритетов для заданной матрицы парных сравнений альтернатив? Какая процедура обеспечивает единственность данного вектора?

9. Чем локальные приоритеты важности альтернатив отличаются от глобальных? Как синтезируется вектор глобальных приоритетов альтернатив нижнего уровня иерархии относительно главной цели ее верхнего уровня?

10. Как в методе анализа иерархий оценивается степень согласованности суждений эксперта? Какие собственные числа имеет матрица парных сравнений альтернатив в случае идеально согласованных суждений эксперта?

Литература

1. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
2. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. Киев: Наукова думка, 2011. 729 с.
3. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2004. 464 с.

6. Метод пространства состояний как инструмент математического моделирования поведения сложных систем разной природы

6.1. Движение динамической системы в пространстве состояний

Необходимо отметить, что традиционно термин «динамика» обозначает процесс изменения, который может наблюдаться во времени, в пространстве либо в каком-нибудь ином базисе наблюдения, выбранном аналитиком. Однако в математике термин «динамическая система» очень часто используют в качестве синонима термина «детерминированная система». А в имитационном моделировании и сценарном анализе чаще используется термин «системная динамика».

Как известно, подавляющее большинство сложных объектов разной природы (технические, биологические, социальные, экономические и другие) целесообразно рассматривать как сложные открытые динамические **(эволюционирующие)** системы.

В прикладных задачах системного анализа, особенно связанных с управлением (принятием решений) и прогнозированием, аналитики неизбежно сталкиваются с необходимостью моделировать изменения, то есть описывать динамику или, как говорят, поведение (эволюцию), сложных систем разной природы. Причём в системном анализе такое описание должно быть реализовано как многофакторное в условиях неопределённости.

В связи необходимостью математического описания поведения во времени сложных систем разной природы актуальным является математический аппарат обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений. В результате обобщения соответствующих теоретических идей и практических наработок был разработан метод пространства состояний (МПС).

Хотя изначально МПС возник в теории дифференциальных уравнений, затем он был существенно усовершенствован и активно используется в современной кибернетике, то есть теории управления сложными системами разной природы.

Перейдём к подробному рассмотрению соответствующих понятий и сути этого метода.

В общем случае, состояние сложной системы характеризуется вектором состояния, то есть упорядоченным в определённой последовательности множеством показателей – переменных состояния.

В сложных системах эти переменные являются скалярами, то есть представляют собой числа, которые характеризуют различные аспекты состояния системы, и, как правило, имеют различную физическую размерность, хотя в некоторых случаях могут быть и безразмерными.

Примеры. Декартовы координаты в физическом пространстве x, y, z и скорость движения космического спутника; концентрация реагентов и продуктов в химических реакциях; количество чрезвычайных ситуаций техногенного, природного и биолого-социального характера, число погибших и пострадавших и так далее – в зависимости от предметной области, цели моделирования и исследуемой системы как процесса.

Само пространство состояний есть координатное пространство $\mathbb{R}^N$, в котором каждая координатная ось соответствует отдельной скалярной переменной состояния. **Во избежание возможных недоразумений, отметим, что координатное пространство** $\mathbb{R}^N$ **есть -я декартова степень множества действительных чисел** $\mathbb{R}$**, то есть:**

$$\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{N \text{ раз}}. \tag{303}$$

Из курса высшей математики известно, что множество $\mathbb{R}^N$, рассматриваемое совместно с алгебраическими операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр, **образует линейное евклидово пространство размерности** N.

Итак, состояние системы – это вектор переменных состояния, то есть точка в многомерном **пространстве состояний**:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N. \tag{304}$$

В научной литературе пространство состояний $\mathbb{R}^N$ нередко называют также фазовым пространством, вектор состояния x – **фазовым вектором**, а переменные состояния $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – **фазовыми переменными**.

Мы же вместо термина «фаза» будем использовать термин «состояние».

Размерность (порядок) системы – это размерность её пространства состояний, то есть число N переменных состояния. Соответственно, говорят об одномерных, двумерных, трёхмерных и, в общем случае, многомерных системах соответствующего порядка.

Таким образом, многомерность системы означает следующее:

$$N > 1. \tag{305}$$

Конечномерные системы имеют конечную размерность n пространства состояний: $N < \infty$. Такие системы, как правило, являются системами с сосредоточенными параметрами, то есть эволюционируют лишь во времени, в связи с чем описываются обыкновенными дифференциальными либо разностными уравнениями, соответственно. Простейшими примерами таких динамических систем являются: известный ещё из курса школьной физики гармонический осциллятор (механический либо электрический маятник); модель неграниченного роста популяции бактерий в неограниченной питательной среде; модели актуарной, то есть страховой, математики и другие.

Бесконечномерные системы имеют, соответственно, бесконечную размерность пространства состояний: $N < \infty$. Такие системы встречаются в задачах математической физики и, будучи системами с распределёнными параметрами, эволюционируют как во времени, так и в физическом пространстве, в связи с чем описываются дифференциальными уравнениями в частных производных (например: уравнение теплопроводности; колебания и волны в сердечной мышце и другие). Изучение таких систем может быть актуально для МЧС России, в частности, с точки зрения целесообразности использования соответствующих научных представлений при создании соответствующих геоинформационных систем (ГИС) для анализа рисков чрезвычайных ситуаций.

Рассмотрим эволюцию, то есть процесс движения, **называемый также поведением сложной динамической системы в пространстве состояний.**

Пусть x – вектор состояния динамической системы:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N. \tag{306}$$

Разумеется, скалярные переменные состояния $x_1, x_2, \ldots, x_N$ динамической системы не являются статичными, то есть они изменяются во времени. Соответственно, вектор состояния x является вектор-функцией времени t, но в целях упрощения записи вместо $x(t)$ мы пишем просто x, подразумевая зависимость вектора состояния x от времени t.

В связи с этим говорят, что динамическая система эволюционирует во времени, то есть движется в пространстве состояний [1].

Математическая модель эволюции (поведения) системы описывает динамику процесса изменения вектора состояния x исследуемой системы во времени t.

Удобнее всего для этой цели подходит **уравнение движения** системы в **пространстве состояний**.

В непрерывном времени это векторное уравнение (система скалярных уравнений) имеет вид:

$$\dot{x} = v(t, x). \tag{307}$$

Здесь и далее точка сверху над символом x обозначает производную x по времени t, то есть:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N. \tag{308}$$

Если рассматривать вектор состояния x как радиус-вектор соответствующей точки в многомерном пространстве состояний $\mathbb{R}^N$, то, по аналогии с механикой, ясно, что $x.$ в левой части уравнения движения есть не что иное как вектор мгновенной скорости изменения состояния динамической системы во времени.

Таким образом, правая часть уравнения движения, то есть вектор-функция v (E) (R)^N, есть **мгновенная скорость** изменения состояния системы.

Следовательно, в каждой точке x пространства состояний $\mathbb{R}^N$ вектор v определяет некоторую мгновенную скорость, в связи с чем говорят о векторном поле фазовых скоростей.

Динамическая система называется **стационарной**, если её векторное поле фазовых скоростей стационарно, то есть не меняется во времени. Это означает, что функция v, заданная в правой части уравнения движения, в явном виде не зависит от времени t, то есть для любого значения t имеем:

$$v(t, x) = v(x). \tag{309}$$

Таким образом, математический закон эволюции стационарной системы не меняется со временем.

В противном случае динамическая система называется **нестационарной**.

Начальное состояние системы – это её состояние в начальный момент времени t_0:

$$x_0 = x(t_0). \tag{310}$$

Траектория движения системы в пространстве состояний называется также фазовой кривой:

$$x = x(t). \tag{311}$$

Эволюционный оператор – это действие R, определяющее состояние системы в любой момент времени t **по известному начальному состоянию** x_0.

$$x(t) = R(t, t_0)\, x_0. \tag{312}$$

Причём для **стационарных систем**, таких как, например, тот же гармонический осциллятор, закон их эволюции не меняется во времени, в связи с чем результат действия эволюционного оператора R зависит лишь от разности $t - t_0$ между текущим и начальным моментом времени, а не от конкретных значений t и t_0, то есть:

$$x(t) = R(t - t_0)\, x_0. \tag{313}$$

Поэтому такие системы называют также инвариантными по отношению к сдвигам во времени (англ. time-invariant systems). Поэтому для таких систем вполне обоснованно можно принять $t_0 = 0$.

Для **нестационарных систем** это не так, поскольку закон их эволюции в явном виде зависит от времени t. К счастью, нестационарные системы редко встречаются в реальной жизни. Простым формальным примером нестационарной системы является факториал дискретного времени.

Как правило, в прикладных задачах речь идёт лишь о **периодической нестационарности в линейных системах**, от которой легко можно избавиться с помощью так называемого преобразования Флоке.

Далее, в целях упрощения изложения мы рассматриваем только стационарные системы.

6.2. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положений равновесия

Рассмотрим уравнение движения стационарной динамической системы:

$$\dot{x} = v(x). \tag{314}$$

В зависимости от характера зависимости вектор-функции v от x динамическая система, заданная уравнением движения, может быть как линейной, так и нелинейной.

Система называется **линейной**, если функция v есть действие линейного оператора (матрицы) A на вектор x, то есть:

$$v(x) = Ax. \tag{315}$$

Таким образом, **уравнение движения линейной системы** имеет вид:

$$\dot{x} = Ax, \tag{316}$$

где A – квадратная матрица **размера** $N \times N$.

В реальности подавляющее большинство систем является нелинейным. Нелинейные системы исследовать гораздо сложнее, чем линейные. К счастью, существует приём, который во многих случаях позволяет упростить работу с нелинейными системами. Этот приём называется **линеаризацией** нелинейной системы (её уравнения движения) в окрестности её положения равновесия [1, 2].

Положение равновесия динамической системы – это точка x^* в пространстве состояний, в которой система без внешнего вмешательства может находиться неограниченно долго.

В частности, для динамической системы, эволюционирующей в непрерывном времени, положение равновесия есть такое состояние x^*, в котором вектор мгновенной скорости движения (изменения состояния) системы равен нулю:

$$v(x^*) = 0. \tag{317}$$

В окрестности положения равновесия x^*, исходя из формулы дифференциала, имеем приближённое равенство:

$$v(x) - v(x^*) = v'_x(x^*)(x - x^*). \tag{318}$$

Поскольку в положении равновесия $v(x^*) = 0$, то:

$$v(x) = v'_x(x^*)(x - x^*). \tag{319}$$

Сместим начало координат с положением равновесия с помощью следующей замены фазовых переменных состояния:

$$\tilde{x} = x - x^*. \tag{320}$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x}. \tag{321}$$

Таким образом, линеаризованная в окрестности положения равновесия математическая модель динамики системы (уравнение движения) имеет вид системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\tilde{x}} = v'_x(x^*)\tilde{x}. \tag{322}$$

Следовательно, **уравнение движения** системы, **линеаризованное в окрестности положения её равновесия**, имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}, \tag{323}$$

где A есть квадратная матрица -го порядка:

$$A = v'_x\left(x^*\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}. \tag{324}$$

В целях упрощения дальнейшего изложения удалим волну над .

6.3. Дискретизация непрерывных линейных систем

Итак, для **линейных** систем, эволюционирующих в **непрерывном** времени, **уравнение движения** системы в пространстве состояний имеет вид:

$$\dot{x} = Ax. \tag{325}$$

Производная второго порядка по времени имеет вид:

$$\ddot{x} = A\dot{x} = AAx = A^2x. \tag{326}$$

Аналогично, производная третьего порядка по времени имеет вид:

$$\dddot{x} = A\ddot{x} = AA^2x = A^3x. \tag{327}$$

Методом математической индукции нетрудно доказать формулу для производной n-го порядка:

$$x_t^{(n)} = A^n x. \qquad (328)$$

Поэтому ряд Тейлора для вектор-функции x_t примет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_{(t=0)}^{(n)}}{n!} t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) x_0. \qquad (329)$$

Выражение в скобках есть **эволюционный оператор**, действующий на **начальное состояние** x_0, есть **матричная экспонента**:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots\ . \qquad (330)$$

Таким образом, решение уравнения движения, определяющее траекторию эволюции системы в пространстве состояний, имеет вид:

$$x(t) = e^{tA} x_0. \qquad (331)$$

Рассмотрим уравнение движения линейной динамической системы, эволюционирующей в непрерывном времени:

$$\dot{x} = Ax. \qquad (332)$$

Как мы уже знаем, траектория эволюции такой системы в пространстве состояний имеет вид:

$$x_t = e^{tA} x_0. \qquad (333)$$

Введём теперь следующее обозначение:

$$\tilde{A} = e^A. \qquad (334)$$

Ясно, что:

$$x_{t+1} = e^{(1+t)A} x_0 = e^A e^{tA} x_0 = \tilde{A} x_t. \qquad (335)$$

Таким образом, в **дискретном времени** уравнение движения **линейной** системы в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$x_{t+1} = \tilde{A}x_t. \tag{336}$$

Отметим, что это уравнение определяет векторную геометрическую прогрессию состояний с операторным знаменателем $\tilde{A}$, причём:

$$x_1 = \tilde{A}x_0; \tag{337}$$

$$x_2 = \tilde{A}x_1 = \tilde{A}\tilde{A}x_0 = \tilde{A}^2x_0. \tag{338}$$

Методом математической индукции нетрудно доказать формулу, определяющую траекторию эволюции дискретной системы:

$$x_t = \tilde{A}^t x_0. \tag{339}$$

6.4. Детерминированное описание поведения многомерных линейных стационарных систем математическими моделями в пространстве состояний

Несмотря на простоту рассмотренных выше моделей, они являются «закрытыми» и, как следствие, не позволяют решать задачи управления, так как в рассмотренных уравнениях отсутствуют переменные управления.

Реальные же системы являются **открытыми** динамическими объектами, то есть взаимодействуют с внешней средой, обмениваясь с ней различными видами ресурсов, в частности: веществом, энергией и информацией. При таком взаимодействии внешняя среда оказывает влияние на систему, и система, в свою очередь, оказывает влияние на внешнюю среду.

Кроме того, как правило, фазовый вектор x **скрыт от непосредственного наблюдения**, в связи с чем о сложной системе с ненаблюдаемыми внутренними переменными, характеризующими состояние системы, метафорически говорят как о «**чёрном ящике**». Если же переменные состояния непосредственно наблюдаемы, то используют метафору «**белого ящика**», а если исследователю априори доступна лишь часть соответствующей информации, то говорят о «**сером ящике**».

Модель сложной системы как «чёрного ящика» в форме «**вход-выход**», представленная на рис. 50, имеет вид следующего **операторного уравнения**:

$$y = Ru, \tag{340}$$

где R – **передаточный оператор**, преобразующий вход u в выход y.

Рис. 50. Представление открытой системы как «чёрного ящика»

Передаточный оператор R, а также сигналы u и y могут быть представлены как во временной, так и с помощью соответствующих преобразований в операторной (частотной) области.

Причём физически реализуемая система, а значит и её передаточный оператор должны удовлетворять **принципу каузальности**, то есть причинной обусловленности. В соответствии с этим принципом, реакция системы на выходе не может опережать во времени входное возбуждающее воздействие.

Многосвязность есть свойство системы, которое означает её многоканальность и то, что, в общем случае, каждая компонента входного сигнала как вектора оказывает влияние на каждую компоненту векторного сигнала на выходе исследуемой системы.

Декомпозиция передаточного оператора

$$u \xrightarrow{R_x} x \xrightarrow{R_y} y$$

позволяет перейти к **обобщённой модели в пространстве состояний**, включающей два векторно-матричных уравнения.

Первое уравнение – **уравнение движения** – является **динамическим**, так как оно описывает траекторию движения системы в пространстве состояний. В непрерывном времени это уравнение является дифференциальным, а в дискретном времени – разностным.

Второе уравнение описывает не динамику, а статику, то есть является **статическим уравнением наблюдателя** реакции системы на входной сигнал управления. Это уравнение является алгебраическим, то есть не содержит операторов дифференцирования и сдвига времени.

В частности, **линейная модель сложной системы в пространстве состояний**, записанная в **непрерывном времени,** имеет следующий вид [1,2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}. \tag{341}$$

В этой модели вектор $u \in \mathbb{R}^m$ есть **управление**, то есть входной сигнал, который находится в распоряжении исследователя, а вектор $y \in \mathbb{R}^k$ есть **реакция** системы на заданный входной стимул, то есть на управление.

Причём компоненты вектора x, то есть **внутренние переменные** системы, в общем случае скрыты от непосредственного наблюдения, тогда как **внешние переменные**, то есть компоненты векторов u и y являются наблюдаемыми.

Как внешние, так и внутренние переменные, изменяются во времени, то есть векторы u, x, y являются вектор-функциями времени t.

Матрицы же A, B, C, D для **стационарных систем** константны (их элементы не зависят от времени) и имеют размерность, согласованную с размерностью векторов u, x, y. При этом матрица A всегда квадратная. и её порядок равен размерности пространства состояния.

Из теории дифференциальных уравнений известна формула, определяющая решение уравнения движения, то есть траекторию движения рассматриваемой системы в пространстве состояний:

$$x_t = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu_\tau d\tau. \tag{342}$$

Таким образом, уравнение «вход-выход» для непрерывной многомерной линейной стационарной системы имеет следующий вид:

$$y_t = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A} Bu_\tau d\tau + Du_t. \tag{343}$$

В этой формуле первое слагаемое есть **свободное движение** системы, тогда как второе слагаемое (**интеграл свёртки**) определяет **вынужденное движение**.

Линейная модель сложной системы в пространстве состояний, записанная в дискретном времени, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \tilde{A}x_t + \tilde{B}u_t \\ y_t = Cx_t + Du_t \end{cases}. \tag{344}$$

Для этой модели имеем:

$$x_1 = \tilde{A}x_0 + \tilde{B}u_0; \tag{345}$$

$$x_2 = \tilde{A}x_1 + \tilde{B}u_1 = \tilde{A}^2x_0 + \tilde{A}\tilde{B}u_0 + \tilde{B}u_1; \tag{346}$$

$$x_3 = \tilde{A}x_2 + \tilde{B}u_2 = \tilde{A}^3x_0 + \tilde{A}^2\tilde{B}u_0 + \tilde{A}\tilde{B}u_1 + \tilde{B}u_2. \tag{347}$$

Методом математической индукции нетрудно доказать формулу:

$$x_t = \tilde{A}^t x_0 + \sum_{s=1}^{t} \tilde{A}^{(t-s)}\tilde{B}u_{s-1}. \tag{348}$$

Таким образом, уравнение «вход-выход» для дискретной многомерной линейной стационарной системы имеет следующий вид:

$$y_t = C\tilde{A}^t x_0 + \sum_{s=1}^{t} C\tilde{A}^{(t-s)}\tilde{B}u_{s-1} + Du_t. \tag{349}$$

В этой формуле первое слагаемое есть **свободное движение** системы, тогда как второе слагаемое (**сумма свёртки**) определяет **вынужденное движение**.

Рассмотрим простейшие примеры моделирования систем в пространстве состояний.

Пример. Известно, что процесс филлотаксиса, то есть расположения листьев на стебле многих растений, и некоторые другие биологические процессы (и даже консонантность музыкальных интервалов) описываются уравнением, генерирующим числа Фибоначчи:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

В классическом определении числовой последовательности Фибоначчи начальными условиями являются единицы ($F_1 = F_2 = 1$), хотя на самом деле допустимы произвольные числовые значения.

С целью приведения рассматриваемого уравнения к каноническому виду линейной динамической системы, эволюционирующей в дискретном времени в пространстве состояний, рассмотрим вектор состояния:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходное уравнение описывает дискретную линейную стационарную динамическую систему второго порядка, математическая модель которой в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Итак, для этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Во избежание возможных недоразумений, связанных с обозначениями, используемыми для описания моделей поведения (эволюции) динамических систем в пространстве состояний, заметим, что в рассматриваемом примере скалярные переменные и являются компонентами вектора состояний системы.

Забегая вперёд, отметим также, что рассматриваемая динамическая система является консервативной, поскольку оператор эволюции, хотя и меняет ориентацию векторов при каждой очередной итерации, но, тем не менее, сохраняет площадь на фазовой плоскости, так как

$$detA = -1.$$

Эта система порождает так называемую гиперболическую динамику, а золотое сечение является ни чем иным как положительным собственным числом системы:

$$det(A - zI) = z^2 - z - 1;$$

$$det(A - zI) = 0 \iff z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Более того, проведенный здесь системный анализ динамики процессов фибоначчиевого типа позволяет устранить разногласия, встречающиеся в литературе в связи с различными определениями золотого сечения.

Пример. Рассмотрим механическое движение частицы в физическом пространстве по некоторой, в общем случае – криволинейной, траектории.

Как известно из курса механики, мгновенная скорость $\vec{v}(t)$ частицы есть производная её радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Представим это уравнение в формате, соответствующем уравнению движения динамической системы в пространстве состояний:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = O\vec{r}(t) + I\vec{v}(t),$$

где O – нулевой оператор, а I – тождественный оператор.

Таким образом, в рассматриваемом примере динамической системой является движущаяся частица, вектором состояния которой является её радиус-вектор $\vec{r}$, а вектором управления – мгновенная скорость $\vec{v}$.

Причём в рассматриваемом уравнении движения нулевой оператор O определяет нулевую матрицу A, а тождественный оператор – единичную матрицу B, то есть:

$$A = O \qquad B = I.$$

Поскольку переходный оператор e^{tA} совпадает с тождественным:

$$e^{tA} = I,$$

то фазовая траектория $\vec{r}(t)$ движения частицы как динамической системы в пространстве состояний из заданного начального состояния $\vec{r}(0)$, очевидно, имеет следующий вид:

$$\vec{r}\left(t\right)=\vec{r}\left(0\right)+\int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau.$$

В частности, если в качестве переменных состояния системы выбрать декартовы прямоугольные координаты радиус-вектора в каноническом евклидовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то есть:

$$\left(\vec{r}\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t),$$

то уравнение движения частицы в пространстве состояний примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}.$$

А фазовая траектория эволюции системы из заданного начального состояния примет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}+\int_0^t \begin{pmatrix} v_x(\tau) \\ v_y(\tau) \\ v_z(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Пример. Рассмотрим процесс вертикального падения физического тела под действием силы тяжести.

Пусть переменная x обозначает вертикальную координату тела, а координатная ось направлена вертикально вниз. Как известно из школьного курса физики, ускорение свободного падения $\vec{g}$ можно представить как производную второго порядка по времени:

$$\ddot{x}=g.$$

Для представления этого уравнения в формате уравнения движения падающего тела как динамической системы, эволюционирующей в пространстве состояний, рассмотрим следующий вектор состояния:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение движения рассматриваемой динамической системы в пространстве состояний:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g.$$

Сопоставляя это уравнение с общим форматом представления уравнения движения в пространстве состояний, имеем:

$$u(t) = g = const;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание равенство

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеем следующую формулу для вычисления переходной матрицы:

$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знание переходной матрицы позволяет рассчитать фазовую траекторию движения рассматриваемой динамической системы из заданного начального состояния:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g d\tau.$$

Упростим немного это равенство:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(0) + g\int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} d\tau.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} x_1(0) + tx_2(0) + \dfrac{gt^2}{2} \\ x_2(0) + gt \end{pmatrix}.$$

Пример. Процесс механического движения камня, брошенного горизонтально, как известно, допускает декомпозицию на две независимые подсистемы, соответствующие горизонтальной и вертикальной составляющей движения камня:

$$\dot{x} = v_0 \text{ и } \ddot{y} = g.$$

Причём первая, «горизонтальная», подсистема эволюционирует по закону равномерного прямолинейного движения, а вторая, «вертикальная», подсистема – по закону равноускоренного прямолинейного движения, соответственно.

Суперпозиция же этих подсистем, связанных через синхронность, порождает новое наблюдаемое эмерджентное качество – движение камня по параболической траектории.

Математическая формализация сказанного выше реализуется путём введения следующего вектора состояний:

$$\begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_2 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение движения рассматриваемой динамической системы в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Блочное разбиение матриц позволяет осуществить системную декомпозицию:

$$\dot{x} = 0x + (1 \quad 0)\begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Упростим немного полученные уравнения движения подсистем.

В силу свойств матричного умножения, имеем:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix} = v_0;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемая системная декомпозиция примет следующий простой вид двух независимых уравнений движения:

$$\dot{x} = 0x + 1v_0;$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g.$$

Фазовые траектории движения «горизонтальной» и «вертикальной» подсистем в соответствующих подпространствах состояния, очевидно, определяются следующими параметрическими уравнениями:

$$x(t) = v_0 t;$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} y_1(0) + t y_2(0) + \frac{gt^2}{2} \\ y_2(0) + gt \end{pmatrix}.$$

Пример. В качестве консервативной динамической системы рассмотрим гармонический осциллятор, например: маятник, колеблющийся горизонтально под действием силы упругости пружины.

Объединяя второй закон Ньютона и закон Гука, получим уравнение:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

где переменная x обозначает координату смещения груза относительно положения равновесия, соответствующего недеформированному состоянию пружины; m – масса груза; k – коэффициент упругости (жёсткость) пружины.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x.$$

Введём обозначение:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} > 0.$$

Для построения математической модели гармонического осциллятора в пространстве состояний рассмотрим вектор состояния:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение гармонического осциллятора в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример. SIR-модель описывает динамику распространения эпидемий. В этой модели используется следующий вектор состояния эпидемиологической ситуации:

$$x(t) = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}(t),$$

где:

S – общее число индивидов, восприимчивых к заболеванию (Susceptible);

I – число инфицированных (Infected);

R – число выздоровевших либо умерших (Removed).

Логика построения SIR-модели исходит из следующего меченого графа переходов, рёбра которого помечены интенсивностью связей (рис. 51):

Рис. 51. Граф переходов в SIR-модели

Сама же SIR-модель описывает изменение эпидемиологической ситуации как нелинейную динамическую систему, эволюционирующую в пространстве состояний, в соответствии со следующим уравнением движения:

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \mu I \\ \mu I \end{pmatrix}.$$

Важным свойством SIR-модели является постоянство численности популяции, что математически следует из очевидного равенства:

$$S. + I. + R. = 0.$$

6.5. Эквивалентность реализаций многомерных линейных стационарных систем и их модальная декомпозиция в пространстве состояний

Пусть исследуемая система эволюционирует в непрерывном времени и описывается следующей линейной моделью в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}. \tag{350}$$

Выполним произвольную невырожденную линейную замену переменных состояния:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = V^{-1}\dot{x} = V^{-1}Ax + V^{-1}Bu = V^{-1}AV\tilde{x} + V^{-1}Bu \\ y = Cx + Du = CV\tilde{x} + Du \end{cases}. \tag{351}$$

Таким образом, мы построили другую модель исследуемой системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}x + Du \end{cases}. \tag{352}$$

Связь между новой и исходной моделью определяется формулами:

$$\tilde{A} = V^{-1}AV; \tag{353}$$

$$\tilde{C} = CV \qquad \tilde{B} = V^{-1}B. \tag{354}$$

Эти две модели различные. Но описывают они одну и ту же динамическую систему. В этом смысле они являются **эквивалентными**:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & D \end{pmatrix}. \tag{355}$$

Нетрудно убедиться в том, что заданное отношение обладает тремя свойствами: является **рефлексивным**, **симметричным** и **транзитивным**:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \tag{356}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & D \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \tag{357}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & D \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{B}} \\ \tilde{\tilde{C}} & D \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{B}} \\ \tilde{\tilde{C}} & D \end{pmatrix}. \tag{358}$$

Таким образом, рассматриваемое отношение действительно является **отношением эквивалентности** на множестве моделей в пространстве состояний и разбивает это множество на попарно **не пересекающиеся классы эквивалентности**, каждый из которых содержит лишь эквивалентные между собой модели этого класса.

Более того, внутри каждого класса эквивалентности сохраняются **инварианты**, то есть для эквивалентных между собой моделей, как нетрудно видеть, сохраняется неизменной матрица D, а также следующие матричные произведения:

$$\tilde{C}\tilde{B} = CVV^{-1}B = CB; \tag{359}$$

$$\tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = CVV^{-1}AVV^{-1}B = CAB; \tag{360}$$

$$\tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} = CVV^{-1}AVV^{-1}AVV^{-1}B = CA^2B. \tag{361}$$

Продолжая эти рассуждения по индукции, нетрудно доказать инвариантность следующего матричного произведения:

$$\tilde{C}\tilde{A}^n\tilde{B} = CA^nB, \tag{362}$$

где степенной показатель n – произвольное натуральное число.

Таким образом, с учётом формулы разложения операторной экспоненты в ряд Тейлора сохраняется и следующее матричное произведение:

$$\tilde{C}e^{(t-\tau)\tilde{A}}\tilde{B} = Ce^{(t-\tau)A}B. \tag{363}$$

Соответственно, как и следовало ожидать, сохраняется интеграл свёртки:

$$\int_0^t \tilde{C}e^{(t-\tau)\tilde{A}}\tilde{B}u_\tau d\tau = \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu_\tau d\tau. \tag{364}$$

Это обстоятельство обеспечивает инвариантность соотношения «вход-выход» для разных моделей (реализаций) одной и той же динамической системы в пространстве состояний и играет важную роль в теории реализаций, на основе которой был развит метод 4SID – Subspace-based State Space System Identification, получивший широкое распространение при решении сложных задач идентификации динамических систем (обратных задач математического моделирования) в условиях неопределённости, то есть задач построения математической модели системы по наблюдаемым приближённым (зашумлённым) вход-выходным данным.

Однако рассмотрение этого метода, в силу его повышенной математической сложности, выходит за рамки нашего курса.

Рассмотрим проблему модальной декомпозиции линейной системы в пространстве состояний.

Реакция системы как динамический процесс может быть представлена в виде линейной комбинации линейно-независимых базисных процессов:

$$y(t) = \gamma_1 e_1(t) + \gamma_2 e_2(t) + \cdots + \gamma_n e_n(t). \tag{365}$$

В общем случае, в качестве базисных процессов исследователем системы могут быть выбраны различные линейно-независимые динамические процессы. Соответственно, достижение необходимого уровня точности разложения потребует различного количества слагаемых.

В качестве примера рассмотрим процесс:

$$y(t) = \sin\omega t. \tag{366}$$

Если в качестве базисных функций использовать степенные функции

$$e_n(t) = (\omega t)^n, \tag{367}$$

то получим, как известно, бесконечное разложение в ряд Тейлора:

$$y(t) = e_1(t) - \frac{1}{3!}e_3(t) + \frac{1}{5!}e_5(t) - \frac{1}{7!}e_7(t) + \dots \ . \tag{368}$$

Если же в качестве базисных функций рассматривать соответствующие гармонические процессы с частотами, кратными ω, то есть строить разложение сигнала $y(t)$ в ряд Фурье, то получится разложение, содержащее лишь одно единственное слагаемое $\sin\omega t$.

Поэтому при построении аппроксимирующих моделей важно, чтобы динамика базисных процессов была наиболее близкой к соответствующей динамике наблюдаемого процесса. В общем случае, выбор подходящего базиса является сложной задачей. Но для многомерных линейных стационарных систем эта задача решается достаточно просто – с помощью жордановой реализации в пространстве состояний.

Внутри каждого класса эквивалентных реализаций (моделей, представлений) исследуемой динамической системы в пространстве состояний можно выбрать одну единственную реализацию (модель) и отождествить далее весь класс с выбранной моделью.

Из теории матриц очевидно, что наиболее удобной с точки зрения простоты организации процесса вычисления переходной матрицы (матричной экспоненты) является каноническая жорданова форма матрицы A.

Соответствующая ей модель называется **канонической жордановой реализацией системы в пространстве состояний**.

Отметим, что все приведенные рассуждения справедливы и по отношению к моделям в дискретном времени.

Спектр системы есть множество собственных чисел матрицы A, то есть корней **характеристического уравнения**:

$$det(A - zI) = 0. \tag{369}$$

Как известно, это уравнение является полиномиальным и, как следствие такого факта, имеет n корней в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Эти корни называют **собственными числами** системы.

В **жордановой реализации** матрица A имеет блочно-диагональный вид:

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & A_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}. \tag{370}$$

Здесь: $A_{\mathbb{R}}$ – это блочно-диагональная матрица, соответствующая действительной части спектра системы; $A_{\mathbb{C}}$ – блочно-диагональная матрица, соответствующая парам комплексно-сопряжённых собственных чисел линейного оператора A.

Каждому **простому действительному собственному** числу $z = \lambda \in \mathbb{R}$ соответствует скалярный жорданов блок 1×1 следующего вида:

$$[\lambda] = (\lambda). \tag{371}$$

Поэтому при вычислении матричной экспоненты e^{tA} этот блок порождает **чисто экспоненциальный собственный переходный процесс** $e^{\lambda t}$.

А каждой паре простых комплексно-сопряжённых собственных чисел $z_{\pm} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ соответствует жорданов блок 2×2 следующего вида:

$$[z_{\pm}] = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{372}$$

Соответствующая этому блоку матричная экспонента имеет вид:

$$e^{t[z_{\pm}]} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}. \tag{373}$$

Поэтому этот блок порождает **пару экспоненциально-осциллирующих собственных переходных процессов**:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{и} \quad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Таким образом, простые собственные значения, то есть собственные числа кратности 1, порождают **собственные базисные переходные процессы** одного из трёх типов:

$$e^{\lambda t},$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{и} \quad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Кратные же собственные числа порождают более сложные собственные базисные переходные процессы, отличающиеся от указанных выше наличием степенных множителей вида:

$$\frac{t^n}{n!}.$$

Все эти собственные базисные переходные процессы образуют **собственный базис** динамики системы, в котором каждый отдельный базисный переходный процесс называется **модой**, то есть **обобщённой степенью свободы** исследуемой линейной динамической системы. Отсюда происходит термин «модальная декомпозиция».

Помимо возможности вычисления переходной матрицы, представление модели линейной системы в канонической **жордановой реализации** позволяет осуществить **модальную декомпозицию системы на не взаимосвязанные по внутренним переменным подсистемы**, взаимосвязь между которыми сохраняется лишь по внешним переменным, а также обеспечивается одновременностью (синхронностью) протекания рассматриваемых процессов во времени.

Пример. Рассмотрим динамическую систему второго порядка.

При отсутствии управления уравнение движения такой системы в непрерывном времени имеет вид:

$$\dot{x} = Ax.$$

При этом имеем:

$$(A \in \mathbb{R}^{2\times 2}) \Rightarrow (det\big(A - zI\big) = z^2 - \big(spA\big)\,z + detA),$$

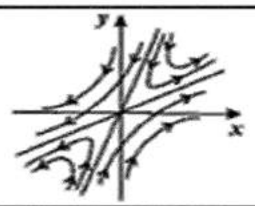
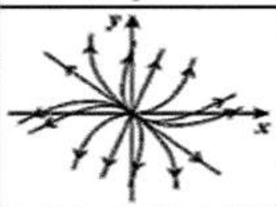
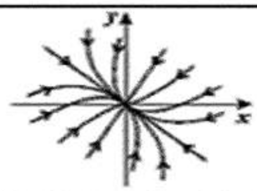
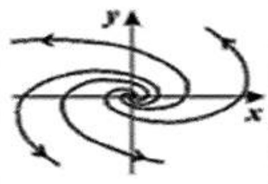
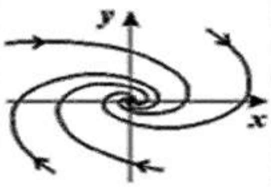
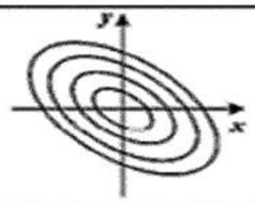
где

$$\sigma = spA \qquad \Delta = detA.$$

Классификация положений равновесия, типов их устойчивости (соответственно, устойчивости системы в окрестности положения равновесия) и типовых фазовых портретов такой системы приведена в табл. 26.

Таблица 26

Типовые фазовые портреты линейных стационарных систем

Тип особой точки	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$	Фазовый портрет	Тип траекторий*
1) Седло. λ_1 и λ_2 — действительные, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\Delta < 0$		Гиперболы
2) Неустойчивый узел. λ_1 и λ_2 — действительные, $\lambda_{1,2} > 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma > 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta > 0 \end{cases}$		Параболы
3) Устойчивый узел. λ_1 и λ_2 — действительные, $\lambda_{1,2} < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma < 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta > 0 \end{cases}$		Параболы
4) Неустойчивый фокус. λ_1 и λ_2 — комплексные, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma > 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta < 0 \end{cases}$		Спирали
5) Устойчивый фокус. λ_1 и λ_2 — комплексные, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma < 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta < 0 \end{cases}$		Спирали
6) Центр. λ_1 и λ_2 — комплексные, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$		Концентрические эллипсы

Отметим, что положение равновесия типа «**седло**» неустойчиво. Соответственно, динамическая система в окрестности седлового положения равновесия неустойчива, так как в модальной декомпозиции системы одна подсистема устойчива, а другая – неустойчива. Динамика системы в этом случае гиперболическая.

Положение равновесия «**центр**» не является ни устойчивым, ни неустойчивым. Оно соответствует **границе устойчивости**. Соответственно, система находится на границе устойчивости.

На основании сведений, представленных в табл. 1, построена бифуркационная диаграмма рассматриваемой системы (рис. 52).

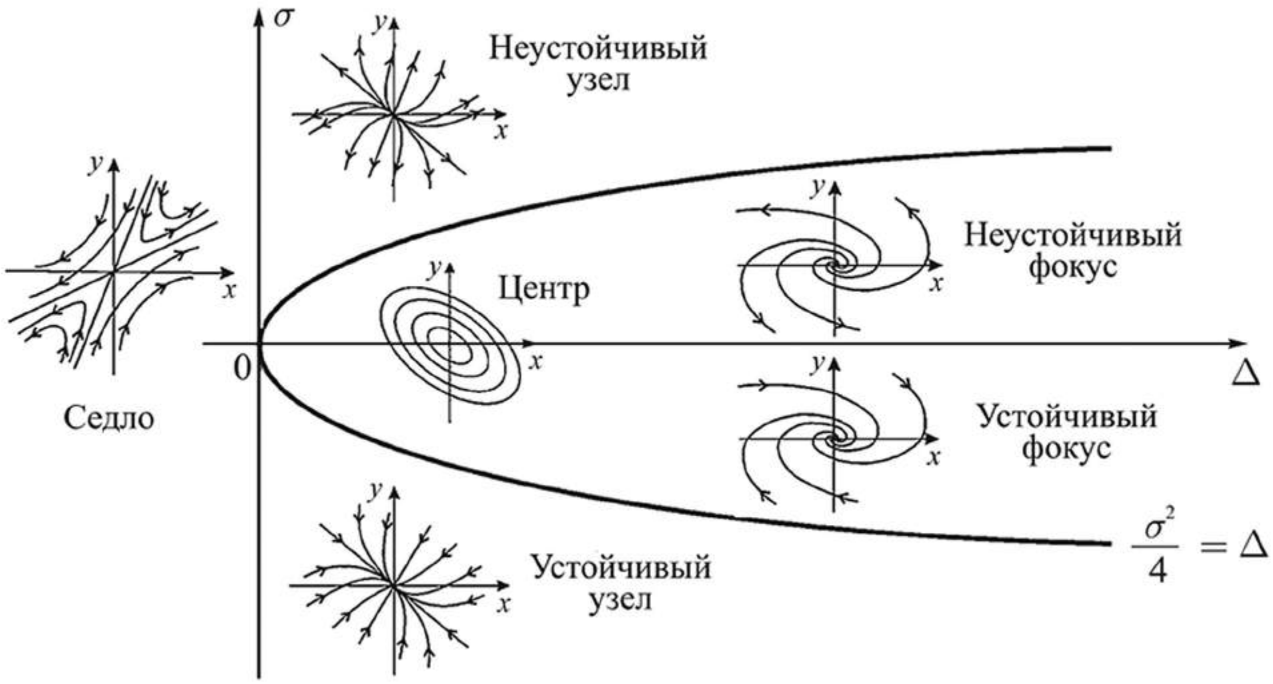


Рис. 52. Бифуркационная диаграмма линейной стационарной системы второго порядка, эволюционирующей в непрерывном времени

Многомерные линейные стационарные системы более высоких порядков характеризуются аналогичными типами фазовых портретов.

6.6. Метод пространства состояний для моделирования сложных систем в условиях неопределённости

В рассмотренных выше моделях динамика систем однозначно детерминирована уравнением движения в пространстве состояний.

Однако в реальных условиях на систему оказывают влияние различные факторы неопределённости (рис. 53). Эти факторы могут быть включены в модель **аддитивно** либо **мультипликативно**.

Рис. 53. Моделирование открытых систем в условиях неопределённости

В простейшем случае неопределённость вводится **аддитивно.** В результате модель в пространстве состояний в **непрерывном времени** примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \xi \\ y = Cx + Du + \eta \end{cases}. \tag{374}$$

Соответствующая модель в **дискретном времени**:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \tilde{A}x_t + \tilde{B}u_t + \tilde{\xi}_t \\ y_t = Cx_t + Du_t + \eta_t \end{cases}. \tag{375}$$

В этих моделях **шумовые векторы** ξ и η изменяются во времени и представляют влияние факторов неопределённости.

Вектор ξ представляет собой воздействие на систему неконтролируемых факторов внешней среды (неконтролируемые входы) и внутренние возмущения в самой системе.

Вектор η представляет собой шумы в каналах измерения выходных управляемых координат.

При **мультипликативном** введении неопределённость включается в модель более сложным образом, например: путём умножения векторов u, x, y на шумовые матрицы.

В теории управления и идентификации сложных систем разной природы применяются два основных подхода к формализованному описанию неопределённости: теоретико-вероятностный и теоретико-множественный.

Традиционный, **теоретико-вероятностный**, подход определяет неопределённость с точки зрения независимых стационарных случайных процессов типа белого гауссовского шума (**стохастическая неопределённость**). Однако на практике такой способ формализации не всегда соответствует реальности.

Гораздо более широкие возможности к моделированию неопределённости открывает **теоретико-множественный** подход, в рамках которого факторы неопределённости интерпретируются как случайные шумовые векторы, принадлежащие априори заданным ограниченным множествам, рассматриваемым исследователем в соответствующих метрических пространствах (**ограниченная неопределённость**).

Например, могут рассматриваться шумы, ограниченные по амплитуде либо по мощности (энергии).

6.7. Основные структурные свойства динамических систем

В кибернетике, то есть теории управления сложными системами разной природы, выделяют ряд структурных свойств динамических систем. К основным относятся: устойчивость, управляемость, наблюдаемость и другие.

Устойчивость динамической системы в окрестности её положения равновесия означает, что эта система, будучи предоставленной самой себе (то есть без внешнего управления), будет эволюционировать в собственном свободном движении к этому положению равновесия.

Для линейной системы в непрерывном времени:

$$\dot{x} = Ax, \tag{376}$$

ноль, очевидно, является положением равновесия.

Критерий устойчивости. Линейная система, эволюционирующая в **непрерывном времени**, устойчива тогда и только тогда, когда действительная часть всех собственных чисел матрицы отрицательна.

Линейная система, эволюционирующая в **дискретном времени**, устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы $\tilde{A} = e^A$ по модулю строго меньше единицы.

Если хотя бы для одного собственного числа соответствующее условие устойчивости нарушается, то система становится неустойчивой.

Минимальная фазовость системы есть свойство, которое означает, что обратная связь является причинно-следственной и устойчивой.

Например, когда вы моетесь в душе и, открывая кран горячей воды, получаете холодную воду.

В качестве аналогичного примера можно сказать, что люди, отвечающие злом на добро, обладают неминимально-фазовой психологией.

Интересно, что, по всей видимости, в науке до сих пор отсутствует критерий, позволяющий по заданной модели динамической системы в пространстве состояний определить является ли система минимально-фазной или нет.

Управляемость есть свойство системы, которое обозначает принципиальную возможность перевести систему из начального состояния в любое заданное конечное состояние за конечный промежуток времени.

Критерий управляемости. Линейная стационарная система управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен размерности пространства состояний, то есть:

$$rang(B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B) = n. \qquad (377)$$

Наблюдаемость есть свойство системы, которое обозначает принципиальную возможность восстановить информацию о начальном состоянии системы по известной паре данных «вход-выход», наблюдаемых на конечном промежутке времени.

Критерий наблюдаемости. Линейная стационарная система наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости равен размерности пространства состояний, то есть:

---

[7] Примечание автора пособия.

$$rang\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n. \qquad (378)$$

Идентифицируемость – это свойство, обозначающее возможность восстановления структуры и матричных параметров математической модели системы в пространстве состояний по наблюдаемым данным на входе и выходе.

В классических условиях (отсутствие неопределённости либо неопределённость в виде слабого белого шума) идентифицируемость эквивалентна конъюнкции управляемости и наблюдаемости.

Отметим, что в условиях ограниченной неопределённости классические условия идентифицируемости подлежат уточнению.

Разумеется, существуют и другие свойства, рассмотрение которых выходит за рамки нашего курса, так как требует углубления в смежные дисциплины: абстрактную алгебру, теорию управления и др. В частности, **робастность**, то есть надёжность адаптивных систем управления, в рамках нашего курса не рассматривается.

6.8. Понятие о нелинейных системах и явлении динамического хаоса

Динамические системы противопоставляются **статическим** и для системного анализа представляют гораздо больший интерес, чем статические.

Сложные системы (по характеру своего поведения) могут быть:

- **линейные** и **нелинейные**;
- **стационарные** и **нестационароные**;
- **консервативные** и **диссипативные**.

Кроме того, системы могут быть с **сосредоточенными** и с **распределёнными** параметрами.

Системы с сосредоточенными параметрами – это системы, эволюционирующие лишь во времени. Такие системы описываются дифференциальными либо разностными уравнениями, содержащими лишь производную по времени либо сдвиг по времени, соответственно.

Системы с распределёнными параметрами – это системы, эволюционирующие как во времени, так и в пространстве. Такие системы возникают, например, в задачах математической физики и описываются дифференциальными уравнениями в частных производных как по времени, так и по пространственным координатам.

Интересно отметить, что преобразование Галёркина позволяет преобразовать распределённую систему в систему с сосредоточенными параметрами, но полученная система будет при этом бесконечномерной.

Также в термодинамике различают **обратимые** и **необратимые процессы**. Подавляющее большинство процессов является необратимым.

Пример. Сырое яйцо, превращённое в яичницу. Хотя в последнее время некоторые учёные пишут о возможности обратной денатурации белка, но, тем не менее, не предоставляют информацию о том, как это можно сделать.

Нелинейность. В множестве всех динамических систем особое место занимает класс нелинейных систем. Этот класс гораздо шире класса линейных систем.

Прежде мы рассматривали исключительно линейные системы. В реальности же далеко не все системы являются линейными, то есть не допускают приемлемого качества описания в классе линейных моделей. Исследованием сложных нелинейных систем разной природы занимается наука «синергетика», изложение которой, в силу чрезмерно высокой математической сложности материала, выходит за рамки нашего курса.

Отметим лишь некоторые основные положения теории нелинейных систем. Слово «синергия» означает «совместное действие», приводящее к возникновению эмерджентных свойств целостной системы, отсутствующих у отдельных её частей.

Синергетика – это наука, которая изучает сложные, существенно нелинейные процессы системной самоорганизации, то есть упорядочивания, хаоса. Такие процессы часто сопровождаются формированием фрактальных, то есть геометрически самоподобных структур [3, 4].

Примерами являются: процесс образования снежинок на стекле; формирование шестигранных конвекционных ячеек Бенара в слое вязкой жидкости, равномерно подогреваемой снизу; реакция Белоусова-Жаботинского (нелинейный химический осциллятор); процессы развития биологических систем; эффект Ферма-Паста-Улама; каскадный эффект чрезвычайных ситуаций и др.

Интересно отметить, что **математические модели нелинейных систем внешне могут выглядеть очень просто**. Тем не менее, динамика, генерируемая даже простейшими нелинейными моделями, может быть **очень сложной**.

В частности, для нелинейных систем существенно **усложняется понятие положения равновесия**. А именно: в пространстве состояний появляются **аттракторы** – притягивающие (устойчивые) множества и **репеллеры** – отталкивающие (неустойчивые) множества, которые нередко имеют форму **фрактала**, то есть самоподобного множества, и изучаются в специальном разделе математики – **фрактальной геометрии**.

Причём, даже в идеальных условиях отсутствия действия вероятностных факторов неопределённости, вблизи странного аттрактора динамика существенно усложняется: возникают **динамический хаос** и обусловленное им **явление экспоненциального разбегания фазовых траекторий** эволюции нелинейной системы, исходящих даже из очень близких начальных состояний, то есть имеет место **некорректность в смысле неустойчивости**.

Всё это позволяет говорить о нелинейности как о наиболее существенном факторе системной неопределённости.

Более того, действие одного лишь этого фактора часто обусловливает недетерминированность будущего и, как следствие, его непредсказуемость, по крайней мере, в долгосрочной перспективе. Говоря точнее, горизонт прогнозирования динамики нелинейных систем становится ограниченным.

Это положение является крайне важным, поскольку ранее, **до возникновения нелинейной науки – синергетики, считалось, что причиной неопределённости является лишь случайность, имеющая вероятностную природу**.

В качестве примеров неопределённости, связанной со сложной динамикой, генерируемой простой, но **нелинейной** моделью, достаточно вспомнить известную модель – «аттрактор Лоренца», используемую в гидрометеорологии, а также брюсселлятор – нелинейную модель химического осциллятора Белоусова-Жаботинского.

Кроме того, сложные нелинейные самоорганизующиеся системы в процессе своего развития неизбежно проходят через **точки бифуркации**, в которых система оказывается в кризисе и выбирает путь своего дальнейшего развития, причём поведение системы в точке бифуркации сопровождается **хаотическими флуктуациями**, и малейшее внешнее воздействие способно повлиять на выбор.

Комплексные, системные исследования критических режимов функционирования и точек бифуркации сложных нелинейных систем, в частности: критически важных и потенциально опасных объектов, скорее всего, станут ключом к прогнозированию возможных чрезвычайных ситуаций и катастроф в будущем и, как следствие, заложат фундамент обеспечения комплексной безопасности населения и территорий. Кроме того, нелинейные исследования особенно актуальны в контексте изучения наиболее общих закономерностей протекания сверхсложных глобальных процессов, неизбежно сопровождающихся опасностями и угрозами глобальных экологических катастроф, каскадным эффектом при возникновении чрезвычайных ситуаций, а также глобальными мировыми кризисами.

Важно различать два класса динамических систем: **консервативные** и **диссипативные**.

В физике термин «**консервативные**» означает «**обеспечивающие сохранение энергии**». Например, механические колебательные системы без трения относятся к классу консервативных систем.

При наличии трения они оказываются диссипативными системами. При этом механическая энергия не сохраняется, но постепенно рассеивается, превращается в тепло, то есть в энергию микроскопического движения молекул самой системы и ее окружения.

Строго говоря, в этом случае временная эволюция должна определяться не только макроскопическим состоянием системы, но и переменными, относящимися к молекулам. Тем не менее, во многих случаях описание в рамках теории динамических систем с точки зрения макроскопических переменных остается достаточным, разумным и довольно точным, и мы говорим о диссипативной динамической системе.

Было бы хорошо, тем не менее, иметь определение, апеллирующее не к определенному классу объектов конкретной физической природы, а к основным понятиям теории динамических систем.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из очень большого числа одинаковых не взаимодействующих динамических систем, различающихся только начальными условиями. В фазовом пространстве ансамбль представляется облаком изображающих точек. Это облако эволюционирует во времени, изменяя размер и форму в соответствии с движением составляющих его точек, согласно динамическим уравнениям исходной системы.

Если каждый элемент облака конечного размера с течением времени сохраняет свой фазовый объем постоянным (по крайней мере, при описании с использованием надлежащим образом выбранных переменных), то это случай **консервативных систем** (рис. 54).

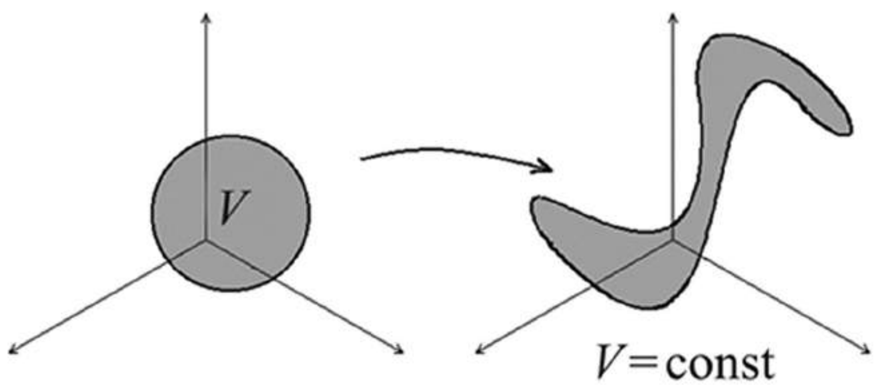


Рис 54. Консервативная система

Пример. Можно доказать, что дискретная динамическая система, соответствующая разностному уравнению чисел Фибоначчи, сохраняет площадь в фазовом пространстве, то есть является консервативной системой.

В **диссипативных системах** фазовый объем уменьшается по ходу эволюции во времени, по крайней мере, в среднем (рис. 55). Таким образом, облако изображающих точек оседает, в конце концов, на некоторое подмножество в фазовом пространстве, которое называется аттрактором (или, возможно, на аттракторы в количестве более одного).

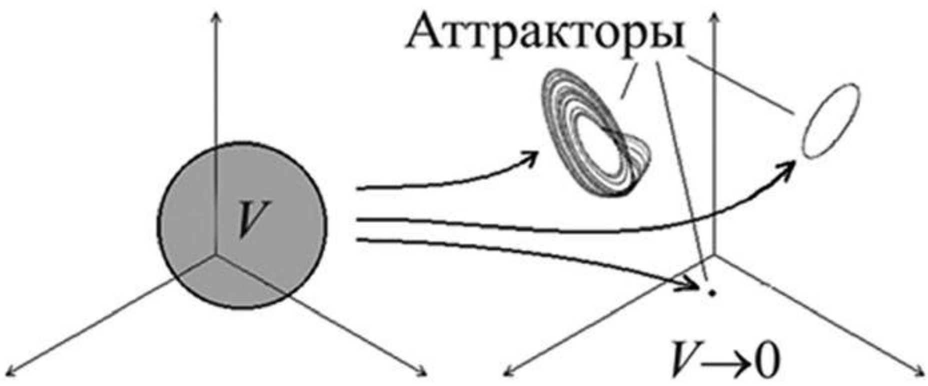


Рис. 55. Диссипативная система

Пример. Все процессы развития являются диссипативными.

Таким образом, в консервативном случае облако изображающих точек можно мыслить как состоящее из несжимаемой жидкости, в то время как в диссипативном случае его надо представлять себе как сжимаемую субстанцию, наподобие пара, имеющего возможность конденсироваться с существенным уменьшением занимаемого объема.

Аттракторы отвечают установившимся динамическим режимам в диссипативных системах, возникающим в итоге долговременной эволюции.

Простейший пример аттрактора – устойчивая неподвижная точка или устойчивое состояние равновесия.

Еще один простой пример – устойчивый предельный цикл, замкнутая орбита, представляющая периодические автоколебания.

Аттрактор, соответствующий устойчивому квазипериодическому движению в виде композиции составляющих с двумя или более несоизмеримыми частотами, – это тор соответствующей размерности.

Хаотическим установившимся режимам соответствуют специфические нетривиальные множества в фазовом пространстве, которые называют **странными аттракторами** [**Рюэль и Такенс, 1981**].

В случае сосуществования **двух** или **более аттракторов** в фазовом пространстве говорят о **бистабильности** или **мультистабильности**. Множество состояний в фазовом пространстве, стартуя от которых орбиты приходят к аттрактору, называется бассейном этого аттрактора.

Дать удовлетворительное формальное определение аттрактора, охватывающее всевозможные случаи, которые могут встретиться, является непростой проблемой [**Milnor, 1985**].

Неустойчивые аттракторы называют **репеллерами**.

Пример. Наглядной иллюстрацией явления системной самоорганизации, то есть упорядочивания хаоса, является нелинейный диссипативный процесс образования ячеек Бенара.

В 1900 году была опубликована статья французского исследователя Бенара с фотографией структуры, по виду напоминающей шестигранные пчелиные соты.

Ячейки Бенара возникают в изначально однородной вязкой жидкости, например, в подсолнечном масле, при закритическом значении температурного градиента, то есть разности температур между нижней и верхней частями сосуда, подогреваемого снизу (рис. 56).

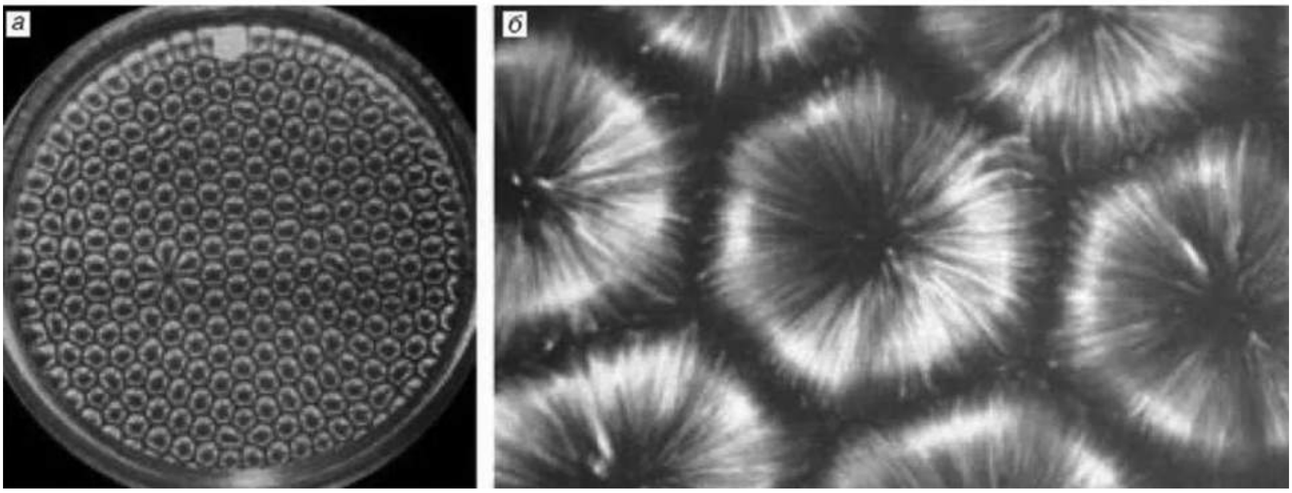


Рис. 56. Конвекционные ячейки Бенара

Тепловая конвекция в подогреваемом снизу горизонтальном слое вязкой жидкости иллюстрируется на рис. 57.

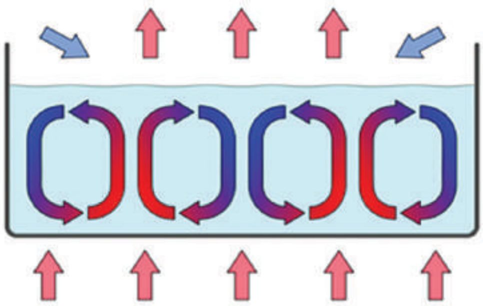


Рис. 57. Схема формирования конвекционных ячеек Бенара

Таким образом, события развиваются в следующей последовательности:

1. **Однородность** хаотического броуновского движения молекул.

2. **Неоднородность**, то есть упорядоченность, **системность**, выраженная в форме ячеек Бенара – явление самоорганизации изначального хаотического движения молекул жидкости в упорядоченные структуры.

3. **Турбулентность**, то есть **пространственно-временной хаос**.

Динамический (детерминированный) хаос есть сложное поведение в детерминированных нелинейных динамических (детерминированных) системах, находящихся далеко от положения равновесия.

Хаотическое поведение нелинейной динамической системы **означает:**

- неустойчивость фазовых траекторий;
- рост малого начального возмущения во времени;
- перемешивание элементов фазового объема;
- непредсказуемость поведения системы на больших временах.

Хаотическое поведение возникает:

- не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства.

Нелинейность является **необходимым** (но **не достаточным**) условием существования динамического, то есть детерминированного хаоса.

Линейные дифференциальные и разностные уравнения к хаосу никогда не приводят.

Хаотическое поведение демонстрируют:

- системы трех и более автономных (стационарных) нелинейных дифференциальных уравнений;
- системы двух неавтономных (нестационарных) дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему);
- дискретные нелинейные системы;
- системы с запаздыванием.

Интересным проявлением самоорганизации, то есть упорядочивания хаоса, является формирование фрактальных структур.

Основное свойство фракталов – их геометрическое **самоподобие**. То есть любой микроскопический фрагмент фрактала в том или ином отношении воспроизводит его глобальную структуру. В простейшем случае часть фрактала представляет собой просто уменьшенный целый фрактал.

Примеры фракталов и фракталоподобных структур. В неживой природе: снежинки на окне; форма береговой линии; края облаков; форма некоторых галактик и другие.

Примерами фракталов в живой природе являются: форма снежинки, форма кочана капусты (рис. 58); различные древовидные фракталы, раковина Наутилуса (рис. 59); розетка подсолнуха (рис. 60); внешние и внутренние митохондриальные мембраны (рис. 61); альвеолы человеческого лёгкого (рис. 62) и другие.

Рис. 58. Фрактальная форма кочана капусты

Рис. 59. Фрактальная форма раковины наутилуса

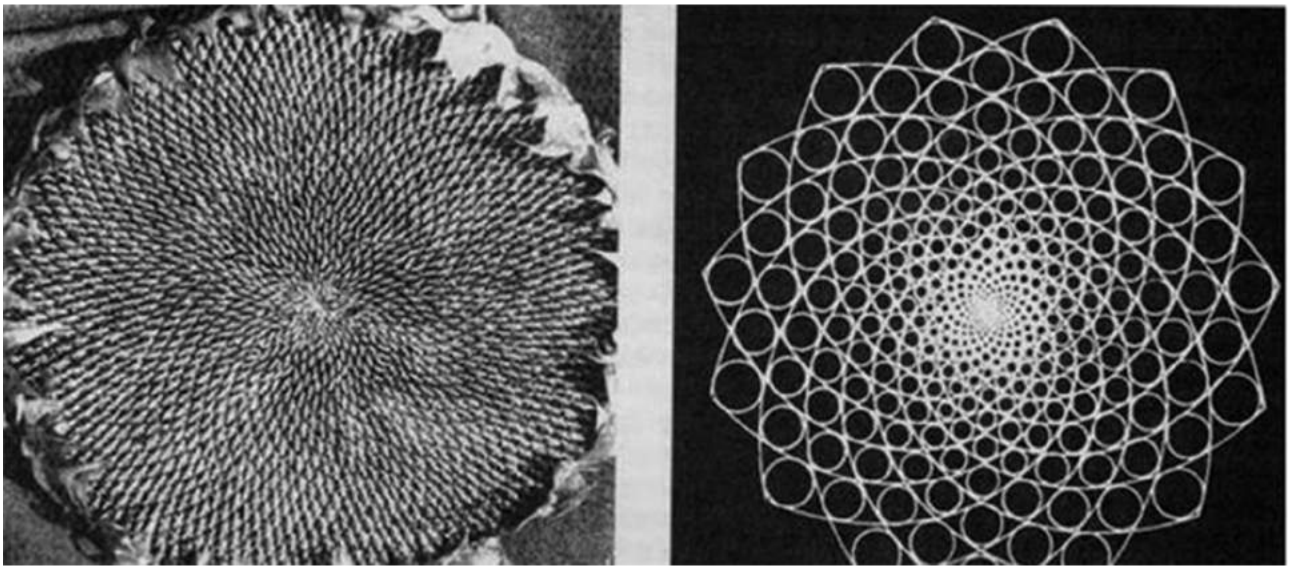


Рис 60. Фрактальная форма, образуемая двумя семействами противоположно закрученных спиралей розетки подсолнуха

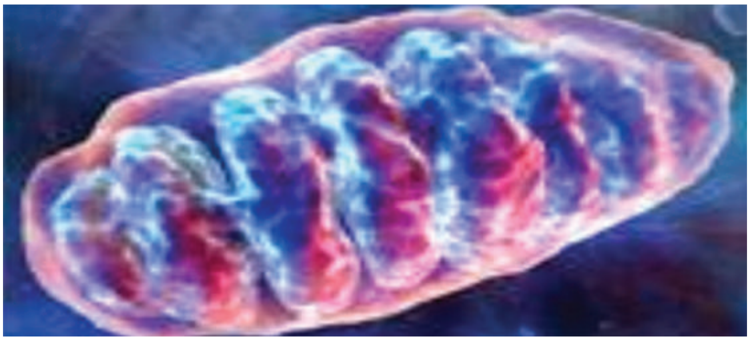


Рис. 61. Фрактальная форма укладки внутренней мембраны митохондрии

Рис. 62. Фрактальная форма в структуре альвеол человеческих лёгких

Интересно отметить, что построение многих фракталов, имеющих очень сложную геометрическую форму, нередко может быть реализовано с помощью весьма простых рекурсивных алгоритмов, то есть путём последовательного повторения одних и тех же простых действий.

Существуют геометрические фракталы на прямой, на плоскости и в пространстве.

Пример. Кривая Коха является геометрическим фракталом. Первые три итерации построения этой кривой иллюстрируются на рис. 63.

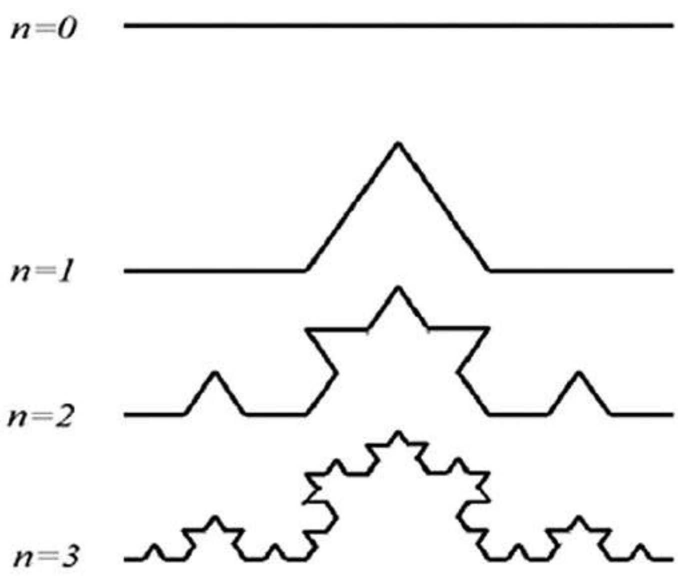


Рис. 63. Первые три итерации построения кривой Коха

После бесконечного числа итераций в пределе получим геометрическую фигуру – кривую Коха. Интересно, что, хотя эта кривая непрерывна, но она, тем не менее, не дифференцируема ни в одной точке, то есть ни в одной точке невозможно провести касательную.

Аналогичные простые рекурсивные алгоритмы позволяют строить и другие сложные фракталы.

Пример. На рис. 64 представлен геометрический фрактал в трёхмерном пространстве.

Возникнув изначально в науке, в настоящее время фракталы очень часто используются и в качестве объектов искусства.

Пример. На рис. 65 представлен фрактал под названием «Кот Мандельброта»; на рис. 66 – используемый в гидрометеорологии странный аттрактор Лоренца; на рис. 67 – примеры других фракталов как объектов искусства.

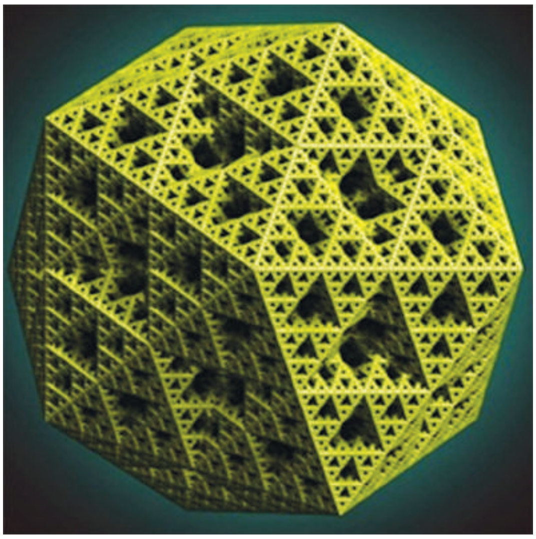


Рис. 64. Пример пространственного геометрического фрактала

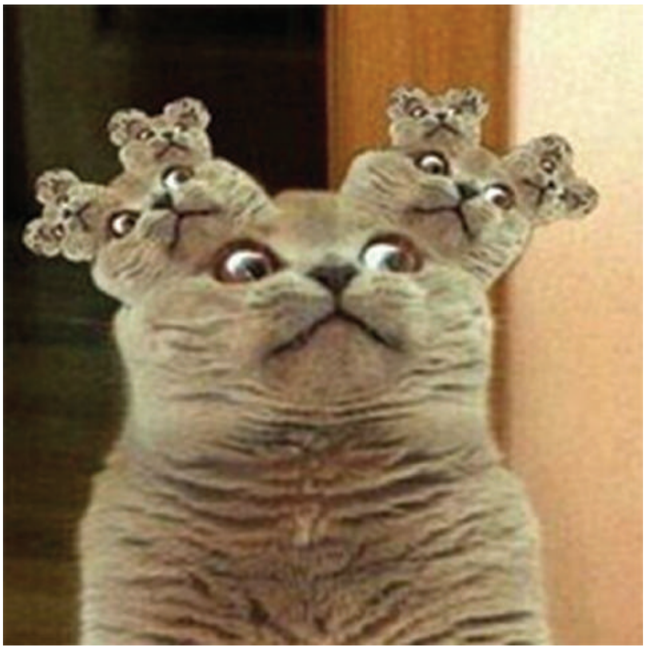


Рис. 65. Фрактал «Кот Мандельброта»

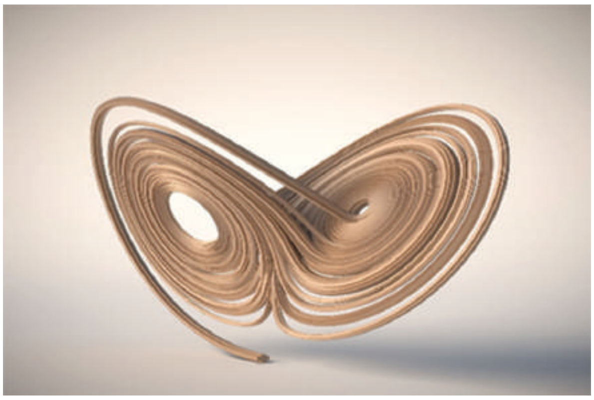


Рис. 66. Странный аттрактор Лоренца как объект искусства

Рис. 67. Примеры фракталов как объектов искусства

А серьёзным, глубоким изучением фрактальных и фракталоподобных структур занимаются фрактальная геометрия и фрактальный анализ.

Применение фрактального анализа к получаемым биоэлектрическим сигналам от органов позволяет эффективно судить о моторной функции органов и ЖКТ, успешно диагностировать различные заболевания.

Рентгеновские снимки, обработанные с помощью фрактальных алгоритмов, дают более качественную картинку.

Фрактальная размерность сети сосудов опухоли и здоровой ткани отличается. Карты адгезии поверхностей раковых и нормальных клеток отличаются.

Пример. В **телекоммуникациях** широко используются так называемые **фрактальные антенны** – относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающихся своей геометрией от известных прежде **решений (рис. 68)**.

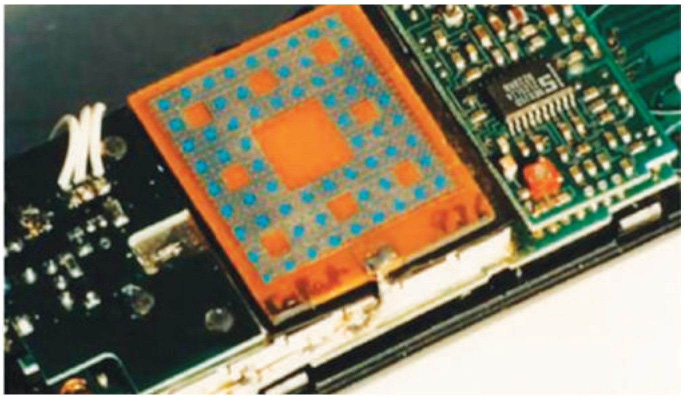


Рис. 68. Пример фрактальной структуры антенны

Также ведутся исследования возможности фрактального сжатия траффика, передаваемого по сетям, с целью более эффективной передачи информации.

С точки зрения системного анализа и синергетики (теории нелинейных динамических систем) крайне важно отметить то, что фракталы возникают также в динамике сложных нелинейных систем. А именно: аттракторы и репеллеры существенно нелинейных неравновесных динамических систем, как правило, имеют фрактальную форму.

Так, прежде детерминизм зачастую приравнивался к предсказуемости, но Лоренцу удалось показать, что детерминизм способен дать лишь краткосрочное предсказание поведения системы, тогда как в долгосрочной перспективе последствия могут быть непредсказуемы. Именно это и означает термин «хаос».

Лоренц изучал конвекцию (теплообмен, возникающий за счет движения молекул жидкости или газа) в атмосфере Земли.

В упрощённом виде нелинейная динамическая система Лоренца имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma y - \sigma x \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix}. \qquad (379)$$

В этой системе переменная с точкой сверху означает ее производную по времени. Более подробно:

- x отвечает за интенсивность конвекции;
- y отображает разность между температурами входящих и нисходящих потоков;

- z характеризует отклонение вертикального температурного профиля от линейной зависимости;
- $\sigma > 1$ – число Прандтля (критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах);
- $\rho > 0$ – число Рэлея (отображает поведение жидкости под воздействием градиента температуры);
- $\beta > 0$ – число, отражающее геометрию конвективной ячейки.

С помощью этой системы уравнений можно рассчитать, как будет вести себя текучая среда, которую равномерно разогревают снизу и охлаждают сверху. Так, как это происходит с воздушными потоками в атмосфере. В частности, она позволяет понять, к какому результату приведет даже небольшое изменение исходных параметров.

Якобиан вектор-функции фазовой скорости имеет вид:

$$v'_{x,y,z}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}. \qquad (380)$$

Дивергенция векторного поля фазовых скоростей отрицательна:

$$div\ v(x,y,z) = sp\ v'_{x,y,z}(x,y,z) = -(\sigma + \beta + 1) < 0. \qquad (381)$$

Таким образом, **фазовый поток сжимает объем фазового пространства**, то есть нелинейная динамическая система, определяемая моделью Лоренца, является **диссипативной системой**.

Странный (хаотический) аттрактор Лоренца (рис. 69) в динамике рассматриваемой системы возникает при следующих значениях параметров:

$$\rho = 28 \quad \sigma = 10 \quad \beta = \frac{8}{3}. \qquad (382)$$

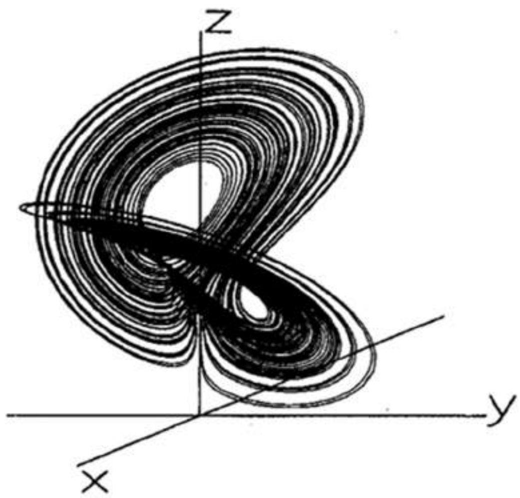


Рис. 69. Аттрактор Лоренца

Аттрактор в модели Лоренца был назван «странным» потому, что его геометрическую структуру невозможно было воссоздать из элементов евклидовой геометрии, то есть из элементов с целочисленной размерностью.

«Странный» аттрактор Лоренца обладает дробной размерностью и является фракталом. Увеличение любого его участка приводит к тому же результату, если просчитать траектории с более точными числовыми значениями параметров, т.е. «странный» аттрактор самоподобен.

Все траектории внутри странного аттрактора неустойчивы; фазовая точка никогда не проходит по одной и той же траектории; любые две из них экспоненциально расходятся, при этом оставаясь на инвариантном торе.

Движения фазовой точки носят хаотический характер, а достаточно малое изменение начальных условий радикально изменяет вид движения: от периодического до хаотического; то есть оно становится неустойчивым, но детерминированно предсказуемым в смысле эволюционного развития.

Перечисленные свойства говорят о частичной упорядоченности, которая проявляется в формировании конвекционных ячеек Рэлея-Бенара.

Теоретически прогнозировать погоду по дням в деталях можно на две недели, а практически, на современном уровне развития науки, – на 5–7 дней.

На самом деле прогноз погоды – это решение системы дифференциальных уравнений. Точность результата, то есть точность решения этих уравнений, зависит от начальных данных. Так вот, согласно современному пониманию фундаментальных законов природы, теоретическая минимальная ошибка начальных данных ведет к тому, что через две недели решение задачи перестает зависеть от этих самых начальных данных.

Другими словами, как бы мы ни старались, спрогнозировать ситуацию более чем на две недели вперед уже невозможно. Увы! И это такая непростая философская ситуация, которую впервые осознали именно метеорологи: сколько ни развивай науку, но две недели – это порог (причём чаще – со значительным преувеличением), за которым невозможно достоверно прогнозировать.

Исследования Лоренца привели к усовершенствованию систем, используемых для составления прогнозов:

- на метеостанциях стали собирать значительно больше данных;
- для вычислений в симуляциях моделей начали использоваться методы, позволяющие добиться большей точности.

Метеорологи, проводящие эксперименты, осознали важность чувствительности системы к начальным условиям – они запускают большое количество симуляций, входные данные для которых обладают едва заметной разницей, и таким образом явление, происходящее в большинстве случаев, «признается» наиболее вероятным.

В завершение данного курса отметим, что синергетика, то есть теория самоорганизующихся (нелинейных, неравновесных, диссипативных) систем, а также математическая теория катастроф Арнольда являются очень сложными математическими дисциплинами. Однако исследование нелинейных систем и возможного, особенно в сильнонеравновесных системах, установившегося режима динамического (детерминированного) хаоса, вполне оправдано и актуально в прикладном плане для МЧС России, в частности, с точки зрения проблемы прогнозирования чрезвычайных ситуаций и решения крайне актуальных сложных прикладных системных задач повышения устойчивости населения и территорий Российской Федерации к стихийным бедствиям, чрезвычайным ситуациям и катастрофам.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под «вектором состояния динамической системы»? Что обозначает термин «эволюционный оператор»? Что представляют собой пространство состояний и фазовая траектория динамической системы?

2. Что представляет собой положение равновесия динамической системы? Как связана матрица линеаризованной системы с полем ее фазовых скоростей в пространстве состояний? Что такое начальное состояние?

3. Как осуществляется дискретизация математической модели многомерной линейной стационарной системы, эволюционирующей в пространстве состояний в непрерывном времени?

4. Какие переменные называют внутренними, а какие внешними? Как называются два векторно-матричных уравнения, образующие математическую модель динамической системы в пространстве состояний?

5. Какие основные подходы к формализации неопределенности используются в кибернетике в контексте метода пространства состояний?

6. Однозначно ли определяется математическая модель многомерной линейной стационарной системы в пространстве состояний? Что такое мода? Какие реализации в пространстве состояний являются эквивалентными?

7. Опишите классификацию положений равновесия и соответствующих фазовых портретов линейных стационарных систем второго порядка.

8. Раскройте смысл основных структурных свойств динамических систем в пространстве состояний. В чем состоит отличие консервативных систем от диссипативных с физической и математической точек зрения?

9. Какие системы называют нелинейными? Раскройте смысл следующих терминов: «аттрактор», «репеллер», «фрактал», «флуктуации», «бифуркация». Приведите примеры фрактальных структур.

10. Поясните суть явления динамического хаоса как фактора неопределенности в детерминированных системах. В каких системах может возникать хаотическая динамика? Что обозначает термин «синергетика»?

Литература

1. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов: Монография / В.Л. Чечулин. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т., 2011. 114 с.
2. *Семенов А.Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В.* Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. 211 с.
3. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

Заключение

Часть 2 учебного пособия включает в себя 6 разделов.

В разделе 1 излагаются основные положения алгебры высказываний и наивной теории множеств Георга Кантора. Обсуждаются процедуры представления булевых функций в совершенной дизъюнктивной и совершенной конъюнктивной нормальной форме.

В разделе 2 рассматривается моделирование связей элементов и подсистем в структуре системы с точки зрения теории отношений. Бинарные отношения обсуждаются в двух аспектах: как множество направленных связей и как действие. Отельное внимание уделяется каузальным отношениям как инструменту многофакторного имитационного моделирования системной динамики.

В разделе 3 излагаются важнейшие положения теории нечетких множеств, созданной профессором Лотфи Заде и обобщенной в рамках теории возможностей. Отдельное внимание уделяется эвристическому принципу обобщения Заде, а также использованию нечетких множеств в задачах оценки рисков чрезвычайных ситуаций на примере методологии INFORM.

В разделе 4 рассматриваются вопросы раскрытия целевой неопределенности в задачах векторной (многокритериальной) оптимизации. Описываются подход, основанный на множествах Парето, а также приемы сведения рассматриваемых задач к однокритериальным. Также рассматривается принцип гарантированного результата.

В разделе 5 описываются теоретические положения метода анализа иерархий (МАИ), разработанного Томасом Саати, и вопросы практической реализации МАИ на примере задачи многокритериального выбора.

В разделе 6 рассматриваются метод пространства состояний, подходы к формализации неопределенности с точки зрения теории вероятностей и теории множеств. Обсуждается эквивалентность различных реализаций динамических систем в пространстве состояний. Рассматриваются важнейшие структурные свойства динамических систем, а также основные понятия синергетики как науки о самоорганизующихся нелинейных неравновесных системах.

Таким образом, часть 2 учебного пособия раскрывает простейшие, но вместе с тем важнейшие прикладные математические методы системного анализа, и, кроме того, знакомит аспирантов с многообразием факторов, обусловливающих системную неопределенность.

Рекомендуемая литература

1. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2004. 464 с.
2. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
3. *Берталанфи Л. фон.* Общая теория систем. 2-е изд. М.: Мир, 1960. 328 с.
4. *Богданов А.А.* Всеобщая организационная наука (тектология). В 3 ч. 3-е изд., перераб. и доп. Л.; М.: Книга,1925–1929.
5. *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике: Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М., 2011. 423 с.
6. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. М.: Иностранная литература, 1960. 434 с.
7. *Клир Дж.* Наука о системах: новое измерение науки // Системные исследования: методологические проблемы. М.: Наука, 1983. С. 61-85.
8. *Клир Дж.* Системология. Автоматизация решения системных задач / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1990. 540 с.
9. *Лефевр В.А.* Алгебра совести / Пер. с англ. М.: «Когито-Центр», 2003. 426 с.
10. *Нахман А.Д.* Вопросы алгоритмической разрешимости математических задач: Монография // Инновации в образовании: Специальный выпуск. Издательская платформа Российской академии естествознания. 2018. 88 с.
11. Системный анализ: Учеб. для вузов / А.В. Антонов. М.: Высш. шк., 2004. 454 с.
12. Теория систем и системный анализ: Учеб. пособие / И.А. Прохорова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. 49 с.
13. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. Киев: Наукова думка, 2011. 729 с.
14. *Каталевский Д.Ю.* Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / Д.Ю. Каталевский. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 496 с.
15. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособ. / В. М. Зюзьков. Томск: Эль Контент, 2015. 236 с.

16. 15 лекций по анализу риска чрезвычайных ситуаций: Учеб. пособие / В.Ю. Востоков. М.: МФТИ, 2010. 288 с.
17. Графы в задачах анализа и синтеза структур сложных систем / В. А. Овчинников. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. 423 с.
18. *Рогов А.Ю.* Графовые методы анализа в дискретной математике: Учеб. пособие / А.Ю. Рогов, В.И. Халимон, О.В. Проститенко. СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012. 88 с.
19. Элементы теории множеств: Учеб.-метод. пособие/ Сост.: Т.В. Кулагина, Н.Б. Тихонова. Пенза: ПГУ, 2014. 32 с.
20. Дискретная математика: Учеб.-метод. пособие / Авт.-сост. В. А. Феофанова, В. И. Воротников / М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВПО «УрФУ им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина»; Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2013. 256 с.
21. *Лисицына Л.С.* Основы теории нечетких множеств. СПб.: Университет ИТМО, 2020. 74 с.
22. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 208 с.
23. Методы оптимизации: Учеб. пособ. / И.В. Гребенникова. Екатеринбург: УрФУ, 2017. 148 с.
24. *Ногин В. Д.* Множество и принцип Парето: Учеб. пособие. СПб.: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2020. 100 с.
25. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
26. Исследование операций: теория и практика: Учеб. пособ. / Сост.: С.В. Куркина. Ульяновск: УлГТУ, 2017. 87 с.
27. *Силкина Г.Ю.* Теория принятия решений и управление рисками. Модели конфликтов, неопределенности, риска.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 72 с.
28. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов: Монография / В. Л. Чечулин. – Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т., 2011. 114 с.
29. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
30. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

31. *Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В.* Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. 211 с.
32. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. М.: Наука, 1978. 167 с.
33. *Зенгер Х. фон.* Стратагемы. О китайском искусстве жить и выживать. Т. 1, 2. М.: Эксмо, 2004.
34. *Леви-Брюль Л.* Первобытное мышление. Психология мышления / Под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер и В. В. Петухова. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 130–140.
35. *Forrester J.W.* Counterintuitive behavior of social systems // Technology Review. 1971. 73 (3).
36. *Brehmer B.* Dynamic decision making: Human control of complex systems // Acta Psychologica. 1992. 81 (3). P. 211–241.
37. *Hogarth R., Makridakis S.* Forecasting and Planning: An Evaluation// Management Science. 1981. Vol. 27. 2. P. 115–138.
38. *Richardson G., Pugh A.* Introduction to System Dynamics Modeling with DYNAMO. MIT Press, 1981.
39. *Richmond B.* System thinking: critical system thinking skills for the 1990s and beyond // System Dynamics Review. 1993. 10 (2–3). P. 128.
40. *Simon H. A.* Models of Bounded Rationality. Cambridge, MA: The MIT Press, 1982.
41. *Sterman J.* Misperceptions of Feedback in Dynamic Decision Making // Organizational Behavior and Human Decision Processes. 1989. 43 (3). P. 301–335.
42. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets. Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353. (1965).
43. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, No. 1, pp. 3-28 (1978).
44. Индекс для управления рисками: http://www.informindex.org.
45. Управление рисками техногенных катастроф и стихийных бедствий: Пособие для руководителей организаций: Монография / Под общ. ред. М. И. Фалеева. РНОАР, М. 2016. 270 с.
46. НИР «Разработка методологии и технологии дистанционной оценки риска чрезвычайных ситуаций для субъектов Российской Федерации и муниципальных образований». Выполнена в рамках Соглашения № 3-НКО-17 от 29.05.2017 «О предоставлении субсидии на государственную поддержку социально ориентированных

некоммерческих организаций», заключенного между Заказчиком и Министерством Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий.
47. О необходимости использования и обобщении методологии INFORM для управления рисками чрезвычайных ситуаций / А.О. Жуков, Л.А. Жукова // Технологии гражданской безопасности. 2016. Т 13. № 3 (49). С. 44–48.
48. Методология и технология дистанционной оценки риска / М.И. Фалеев, И.Ю. Олтян, Е.В. Арефьева, М.В. Болгов // Проблемы анализа риска. 2018. Т. 15. № 4. С. 6–19.
49. Портал открытых данных Российской Федерации: www.data.gov.ru
50. Web-портал дистанционной оценки риска ЧС: www.diorisk.sra-russia.ru.

Учебное пособие

Жуков Алексей Олегович

Системный анализ
Часть 2. Математические основы и методы

Дизайн и верстка: *В.В. Кожемякин*
Корректор *Н.К. Базанова*

Подписано в печать 17.01.2023. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Объем 14,25 п. л. Тираж 300 экз. Печать цифровая.

Отпечатано в ФГБУ ВНИ И ГОЧС (ФЦ)
121353, Москва, ул. Давыдковская, 7.
Завод № 1. Тираж 20 экз.